Informatica e Matematica (6 CFU)

CdLM in CTF (canale A-L)

Modulo MATEMATICA

Dipartimento di Scienze del Farmaco e della Salute

Anno accademico 2024/2025

Prof. Francesco Pappalardo

Dipartimento di Scienze del Farmaco e della Salute

Università degli Studi di Catania

francesco.pappalardo@unict.it

COMBINE Group

In Silico BioMedicine

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA

Programma Matematica

Matematica

- Funzioni elementari: funzioni potenza e radici n-esime, funzioni esponenziali e funzioni logaritmo: definizioni, proprietà, grafici, applicazioni.
- Uso di esponenziali e logaritmi nelle scienze della vita: modelli per l'evoluzione di una popolazione, come quella dei batteri di una coltura o delle cellule di un tessuto di un organismo.
- Funzioni di una variabile reale: cenni su dominio di definizione, crescenza, decrescenza, massimo e minimo (assoluti), composizione di funzioni elementari e loro grafico.
- Limiti: definizioni, proprietà, regole di calcolo, ordine di infinito e di infinitesimo, aspetti grafici, asintoti obliqui.
- Derivate.
- Integrali: definizione, proprietà, calcolo di aree, approssimazione col metodo dei trapezi. Utilizzo degli strumenti di IA per la matematica.

Wolfram Alpha

- Wolfram Alpha è noto per la sua capacità di eseguire calcoli matematici complessi e risolvere equazioni.
- Può gestire algebra, calcolo, statistica e molti altri argomenti matematici.
- È utilizzato da studenti, scienziati, ingegneri e professionisti per risolvere problemi matematici e scientifici.

https://www.wolframalpha.com

Introduzione

- La matematica rappresenta certamente un nucleo di essenziale inmportanza per la **scienza e la tecnologia**. Se non esistessero ad es. le equazioni il nostro mondo non esisterebbe nella sua forma attuale. Le equazioni hanno però una sgradevole reputazione: fanno paura.
- La matematica con i suoi concetti, teoremi, equazioni e funzioni ha un'importanza e rilevanza rapportata ad ogni **contesto storico e scientifico**.
- Le equazioni ad esempio sono strumenti fondamentali per comprendere e descrivere il funzionamento del mondo naturale e tecnologico che ci circonda.
- Molte delle scoperte e dei progressi scientifici più significativi siano stati guidati e supportati dall'uso di equazioni matematiche (***Leggi del moto e di gravitazione universale di Newton, Equazione di Maxwell, Legge di conservazione dell'energia, Equazione di Schrödinger, Teoria della relatività di Einstein,*** *etc.*).
- La direzione seguita dalla storia dell'uomo, nel suo svolgimento, è stata cambiata, più e più volte, da un'equazione. Le equazioni sono dotate di poteri nascosti; esse possono svelare i più intimi segreti della natura.

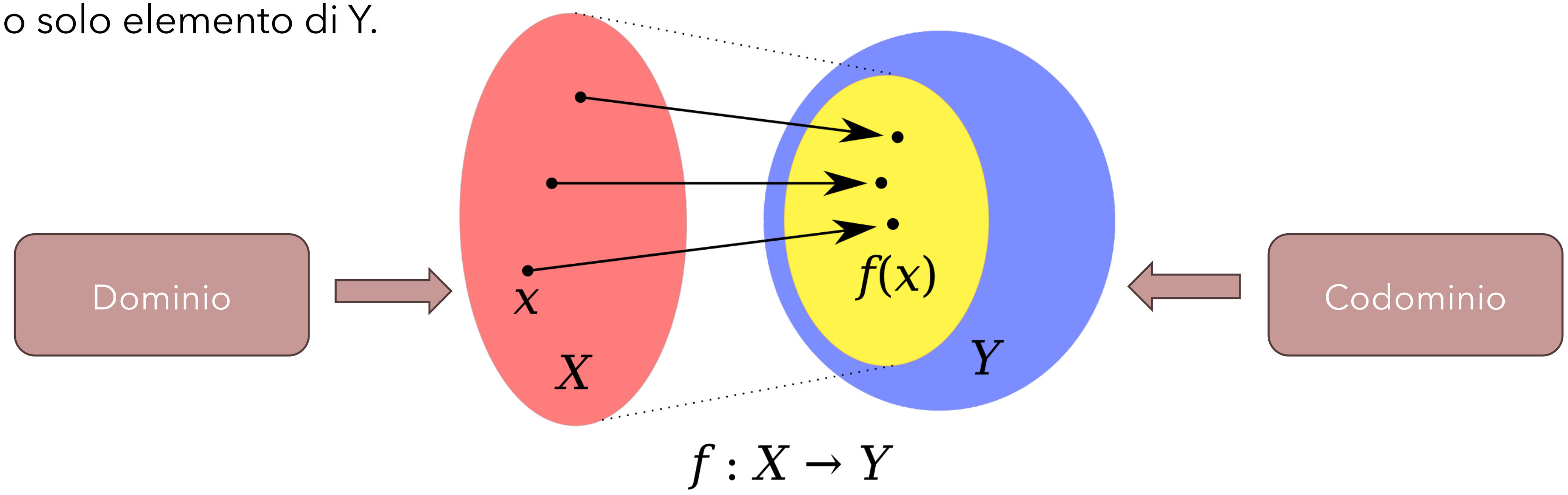
Parte 1

Le funzioni

Definizione di funzione

Siano dati due insiemi X e Y detti rispettivamente **Dominio** e **Codominio**.

Una funzione di X in Y è una relazione che ad ogni elemento di X fa corrispondere uno e uno solo elemento di Y.



Definizione di funzione

Se indichiamo con f tale funzione scriveremo $f : X \to Y$, oppure $y = f(x)$ intendendo che ad ogni elemento x corrisponde, tramite la funzione f, l'elemento y.

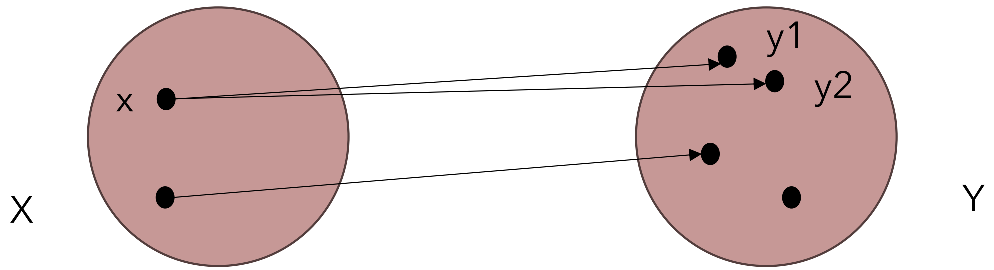
Importante:

- Ogni elemento del dominio X deve avere un corrispondente.
- Il corrispondente di un elemento del dominio è uno e un solo elemento del

codominio Y.

Definizione di funzione

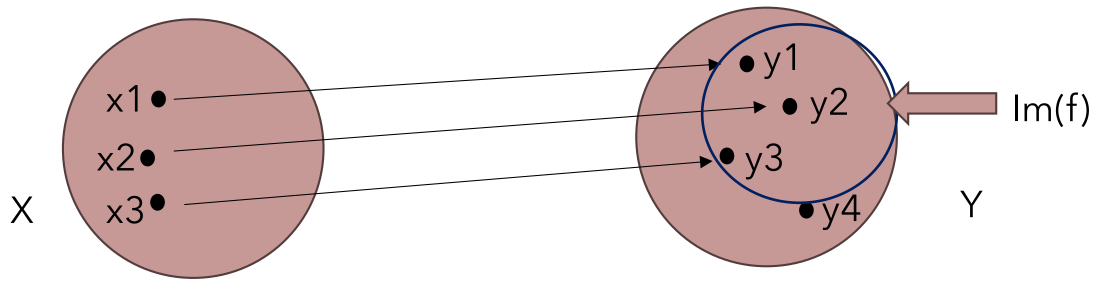
Questa non è una funzione:



Perché esiste un elemento di X che ha 2 corrispondenti in Y.

Definizione di funzione

è possibile che alcuni elementi di Y, non siano corrispondenti di alcun elemento di X.



L'insieme f(X) formato da tutti gli elementi di Y che sono i corrispondenti di un elemento di X si chiama Immagine di f e si indica con Im(f).

La variabile x si chiama anche **variabile indipendente**. La variabile y si chiama anche **variabile dipendente**.

Funzione reale a variabile reale

Se Dominio e Codominio sono sottoinsiemi dell'insieme R dei numeri reali, la funzione si dice **reale a variabile reale.**

Una funzione reale a variabile reale si può rappresentare in un grafico cartesiano, usando l'asse x per rappresentare l'insieme X = Dominio e l'asse y per rappresentare l'insieme Y = Codominio.

Dati

- un sistema di assi cartesiani O x y,
- una funzione $f : X \rightarrow Y$, tale che $y = f(x)$, con $x \in X$ e $y \in Y$,
  il punto $P \equiv (x,y)$, cioè $P \equiv (x,f(x))$, appartiene al grafico della funzione f.

Funzione reale a variabile reale

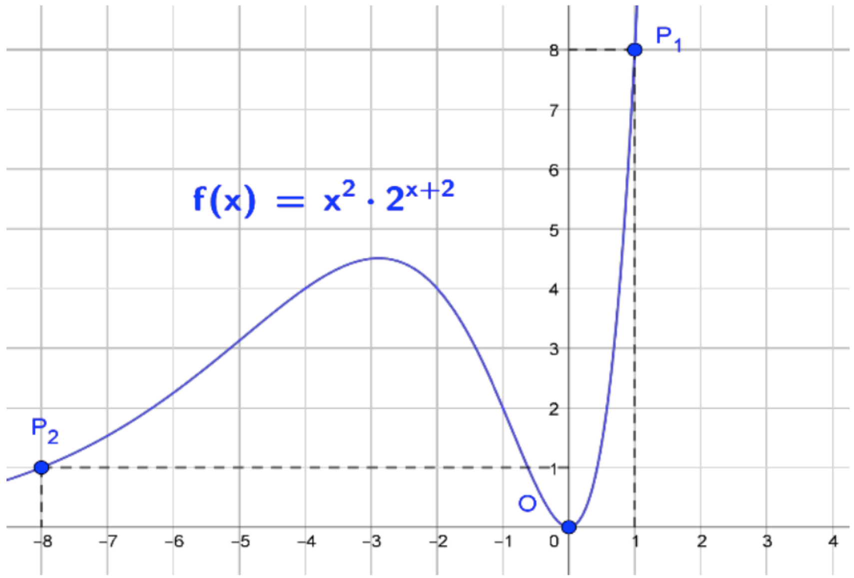
Esempio: Sia $f : R \to R$ definita da $f(x) = x^2 \cdot 2^{x+2}$.

- Se $x=0$, $y = f(x) = f(0) = 0^2 \cdot 2^{0+2} = 0$. Quindi il punto $O \equiv (0,0)$ appartiene al grafico di f.
- Se $x = 1$, $y = f(x) = f(1) = 1^2 \cdot 2^{1+2} = 8$. Quindi il punto $P1 \equiv (1,8)$ appartiene al grafico di f.
- Se $x = -8$, $y = f(x) = f(-8) = (-8)^2 \cdot 2^{-8+2} = 64 \cdot 2-6 = 1$. Quindi il punto $P2 \equiv (-8,1)$ appartiene al grafico di f.

Funzione reale a variabile reale

La funzione f : R → R definita da $f(x) = x^2 \cdot 2^{x+2}$, ha come **Dominio** l'intero insieme dei numeri reali, perchè dato un numero reale x, posso sempre fare il quadrato di x, posso sempre calcolare 2 elevato a (x + 2) e fare il prodotto di questi due fattori.

Il **Codominio** della funzione f è R ma con le operazioni di quadrato ed elevamento a potenza si ottengono sempre numeri reali positivi o nulli, quindi anche il loro prodotto sarà positivo o nullo.
Non otterremo mai una y negativa.
Quindi l'insieme immagine di f è Im(f) = R + ∪ {0}, cioè l'insieme di tutti i numeri reali positivi e dello zero.



Domini di funzioni reali a variabile reale

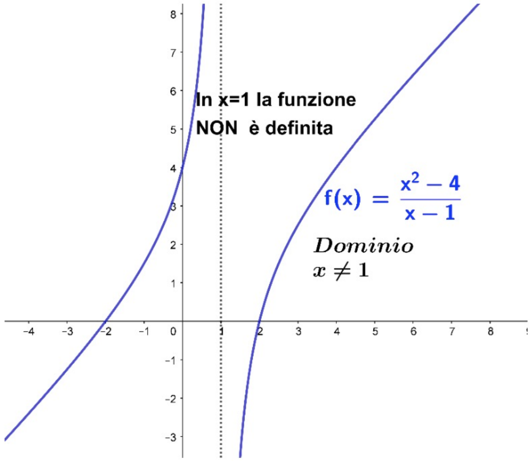
Non sempre tutte le funzioni reali a variabili reali hanno come Dominio l'intero insieme R.

Vediamo quali sono i tre casi principali di limitazioni di Dominio che possiamo incontrare:

- Funzione con quoziente
- Funzione con radice
- Funzione con logaritmo

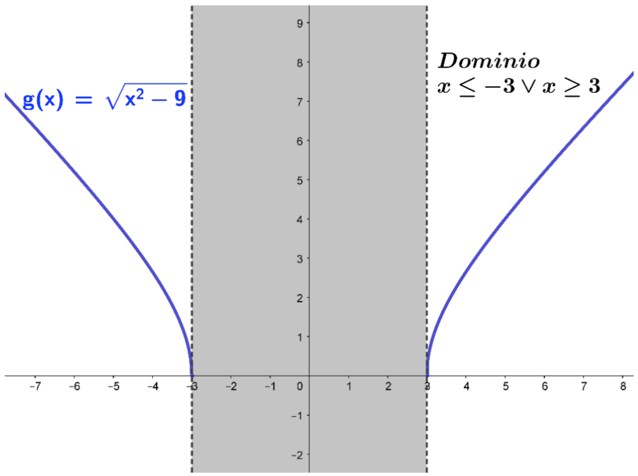
Domini di funzioni reali a variabile reale

Funzione con quoziente. Esempio: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$. Poichè non si può mai dividere per zero, occorre accertarsi che il denominatore $(x-1)$ sia diverso da zero. Pertanto il Dominio di questa funzione è $x \neq 1$



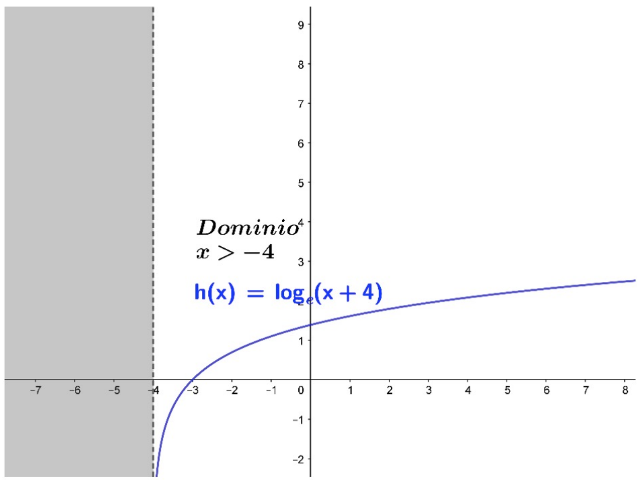
Domini di funzioni reali a variabile reale

Funzione con radice. Esempio: $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Poichè nei numeri reali non si può estrarre la radice quadrata (o di ordine pari) di un numero negativo, occorre accertarsi che il radicando $x^2 - 9$ sia maggiore o uguale a zero. Pertanto il Dominio di questa funzione è $x \leq -3 \vee x \geq 3$;



Domini di funzioni reali a variabile reale

Funzione con logaritmo. Esempio: h(x) = log(x + 4). Poichè l'argomento di un logaritmo deve essere sempre positivo, occorre accertarsi che l'argomento (x + 4) sia positivo. Pertanto il Dominio di questa funzione è x > −4.



Esercizio

a) Trovare il Dominio della seguente funzione: $f(x) = 3 - \sqrt{12 + 4x - x^2}$

b) Troviamo le immagini di $x_1 = 2$, di $x_2 = 8$ e la controimmagine di $y_1 = 3$.

Svolgimento

a) Trovare il Dominio della seguente funzione: $f(x) = 3 - \sqrt{12 + 4x - x^2}$x

- Iniziamo dal Dominio. Poiché un radicando deve sempre essere maggiore o uguale a zero, dobbiamo porre $12 + 4x - x^2 \geq 0$.
- Per trovare i punti in cui la funzione x2−4x−12 = 0, dobbiamo risolvere l'equazione $x^2 - 4x - 12 = 0$.
- Usiamo la formula quadratica per risolvere questa equazione del tipo $ax^2+bx+c=0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Svolgimento

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{2}$$

Quindi, i due punti in cui $x^2 - 4x - 12$ è uguale a zero sono:

$$x_1 = \frac{4+8}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{4-8}{2} = -2$$

Svolgimento

Pertanto, il dominio della funzione $f(x) = 3 - x\sqrt{12 + 4x - x^2}$ è determinato dai valori di x in cui l'espressione sotto la radice è non negativa, cioè $12 + 4x - x^2 \geq 0$, che nel nostro caso è $x \leq -2$ o $x \geq 6$. Quindi, il dominio della funzione è $x \leq -2$ o $x \geq 6$.

b) Trovare le immagini di $x_1 = 2$, di $x_2 = 8$ e la controimmagine di $y_1 = 3$.

Svolgimento

b) Trovare le immagini di $x_1 = 2$, di $x_2 = 8$ e la controimmagine di $y_1 = 3$.

Per trovare le immagini di $x_1 = 2$ e $x_2 = 8$ nella funzione $f(x) = 3 - \sqrt{12 + 4x - x^2}$, sostituiremo questi valori di x nella funzione $f(x)$.

1. Per $x_1 = 2$:

$$f(2) = 3 - \sqrt{12 + 4(2) - (2)^2}$$
$$= 3 - \sqrt{12 + 8 - 4}$$
$$= 3 - \sqrt{16}$$
$$= 3 - 4$$
$$= -1$$

Quindi, l'immagine di $x_1 = 2$ è $f(2) = -1$.

1. Per $x_2 = 8$:

$$f(8) = 3 - \sqrt{12 + 4(8) - (8)^2}$$
$$= 3 - \sqrt{12 + 32 - 64}$$
$$= 3 - \sqrt{-20}$$

L'espressione sotto la radice è negativa, quindi la funzione non è definita per $x_2 = 8$ nel dominio reale. Non possiamo calcolare l'immagine di $x_2 = 8$ in questa funzione.

Svolgimento

Per trovare la controimmagine di $y_1 = 3$, dobbiamo risolvere l'equazione $f(x) = 3$ per x:

$$3 - \sqrt{12 + 4x - x^2} = 3$$

Isoliamo la radice:

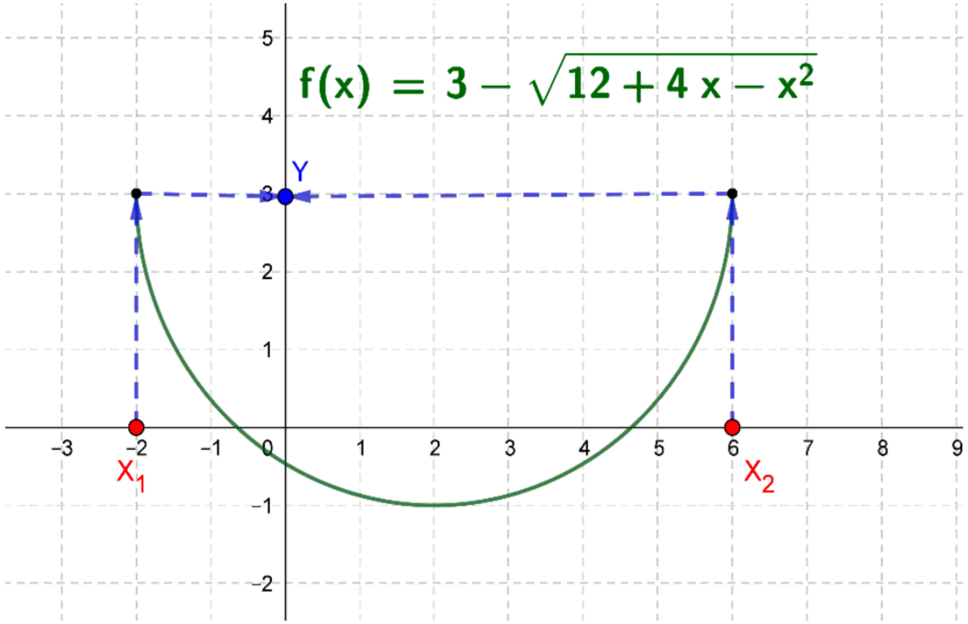
$$\sqrt{12 + 4x - x^2} = 0$$

Siccome la radice è zero solo quando l'espressione sotto la radice è zero, risolviamo:

$$12 + 4x - x^2 = 0$$
$$x^2 - 4x + 12 = 0$$

Ora possiamo usare la formula quadratica per risolvere questa equazione. Tuttavia, poiché abbiamo già fatto questa operazione precedentemente, i risultati sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$.

Quindi, la controimmagine di $y_1 = 3$ nella funzione $f(x)$ è $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$.



Funzione iniettiva

Sia $f : X \to Y$ una funzione.

Allora f si dice **iniettiva** se a elementi diversi del Dominio X corrispondono elementi diversi del Codominio Y, cioè se non esiste una coppia di elementi del Dominio che abbiano lo stesso corrispondente mediante la f.

In simboli, f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Data una funzione iniettiva f, con l'eventuale accorgimento di limitare il nuovo dominio, è sempre possibile trovare la sua funzione inversa f^{-1}.

Funzione iniettiva

Esempio 1

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ definita nel dominio dei numeri reali (R).

Se prendiamo due numeri reali distinti x_1 e x_2 tali che $x_1 \neq x_2$, ma $f(x_1) = f(x_2)$, ciò dimostra che la funzione non è iniettiva.

Supponiamo $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Ora calcoliamo $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$f(-2) = (-2)^2 = 4$
$f(2) = 2^2 = 4$

Anche se $x_1 \neq x_2$ (sono -2 e 2, quindi sono distinti), i loro valori al quadrato, cioè $f(x_1)$ e $f(x_2)$, sono uguali, entrambi sono 4.

Questo dimostra che la funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva, in quanto due valori distinti (-2 e 2 in questo caso) nel dominio vengono mappati allo stesso valore nel codominio. In una funzione iniettiva, ciò non dovrebbe accadere; ogni valore nel dominio dovrebbe corrispondere a un solo valore nel codominio.

Funzione iniettiva

Esempio 2

Sia data, ad esempio, la funzione f : R → R, definita da f(x) = x_2. La funzione f **non è iniettiva**, perchè esistono diversi valori di x che hanno lo stesso corrispondente mediante la f, per esempio: f(3) = 9 ma anche f(−3) = 9. Pertanto la f non è invertibile, perchè la funzione che vorrei usare come inversa, applicata al numero 9 non saprebbe se restituirmi 3 oppure -3.

La stessa funzione, definita solo nel Dominio R+, invece, si può invertire e la sua inversa è la funzione f -1: R → R+, definita da $f-1(x) = \sqrt{x}$.

Se $f(3) = 3^2 = 9$, allora $f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3$.

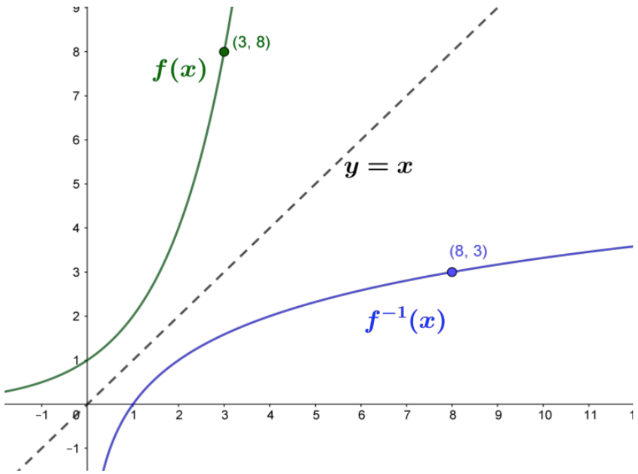
Funzione inversa

Invertire una funzione significa sostanzialmente poter scambiare i ruoli della variabile indipendente (x) e della variabile dipendente (y).

Se, per esempio, il punto (3, 8) appartiene al grafico della funzione f, il punto (8, 3) apparterrà al grafico della f^{-1}.

Funzione inversa

Questo vuol dire che i due grafici delle funzioni f ed f^{-1} sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla retta bisettrice del primo quadrante, che come funzione può essere espressa dalla relazione y = x.



Esercizi

Sia data la funzione f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da f(x) = 2x + 1, che associa, per esempio, a $x^* = 3$ il numero reale $f(x^*) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

La funzione f è iniettiva, pertanto invertibile, e la sua inversa è la funzione $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, che associa, per esempio, a $x^{**} = 7$ il numero reale $f^{-1}(x^{**}) = \frac{7-1}{2} = 3$.

Infatti se y = 2x + 1, allora, isolando la x (che voglio sia la mia nuova variabile dipendente) si ha: 2x = y–1, da cui $x = \frac{y-1}{2}$.

Esercizi

Per calcolare l'inversa della funzione $f(x) = 2x + 1$, denotata come f^{-1}, dobbiamo risolvere per x nell'equazione $y = 2x + 1$ e ottenere x in termini di y. Questo rappresenta la funzione inversa f^{-1}, dove y è la variabile indipendente (l'input) e x è la variabile dipendente (l'output).

Iniziamo con l'equazione della funzione originale:

$y = 2x + 1$

Ora risolviamo per x:

$y - 1 = 2x$

$x = \frac{y-1}{2}$

Quindi, l'espressione per l'inversa $f^{-1}(y)$ è:

$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$

Ora, sostituendo y con x^* (che è 3), otteniamo l'inverso per x^*:

$f^{-1}(x^*) = \frac{x^*-1}{2}$
$f^{-1}(3) = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Quindi, l'inverso di $x^* = 3$ è $f^{-1}(3) = 1$ nell'esempio considerato.

Esercizio

Invertiamo, se possibile, la funzione f : R → R definita da $f(x) = x^3 + 5$.

Se y è il corrispondente di x allora $y = x^3 + 5$.

Isoliamo la x: $x^3 = y-5$, da cui $x= \sqrt{y}-5$.

La funzione inversa di f è allora

f^{-1} (x) : 3= $\sqrt{x} - 5$.

Esercizio

Invertiamo, se possibile, la funzione f : R → R definita da f(x) = x^3 + 5.

Per invertire la funzione $f(x) = x^3 + 5$ e trovare la sua inversa, seguiamo i passaggi indicati di seguito:

1. Scriviamo la funzione originale e sostituisci $f(x)$ con y: $y = x^3 + 5$.
2. Risolviamo per x in termini di y.
3. Scambiamo x e y per ottenere l'inversa della funzione.

Iniziamo con l'equazione $y = x^3 + 5$ e risolviamo per x:

$$y = x^3 + 5$$

Sottraiamo 5 da entrambi i lati dell'equazione:

$$y - 5 = x^3$$

Ora, per ottenere x, dobbiamo prendere la radice cubica di entrambi i lati dell'equazione:

$$x = \sqrt[3]{y - 5}$$

Adesso abbiamo trovato x in funzione di y.

Per ottenere l'inversa, scambiamo x e y:

$$y = \sqrt[3]{x - 5}$$

Questa è l'inversa della funzione $f(x) = x^3 + 5$. Tuttavia, è importante notare che questa inversa è definita solo per $x \geq 5$ poiché la radice cubica di un numero negativo non è definita nel campo dei numeri reali.

Quindi, l'inversa di $f(x) = x^3 + 5$ è $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 5}$ per $x \geq 5$.

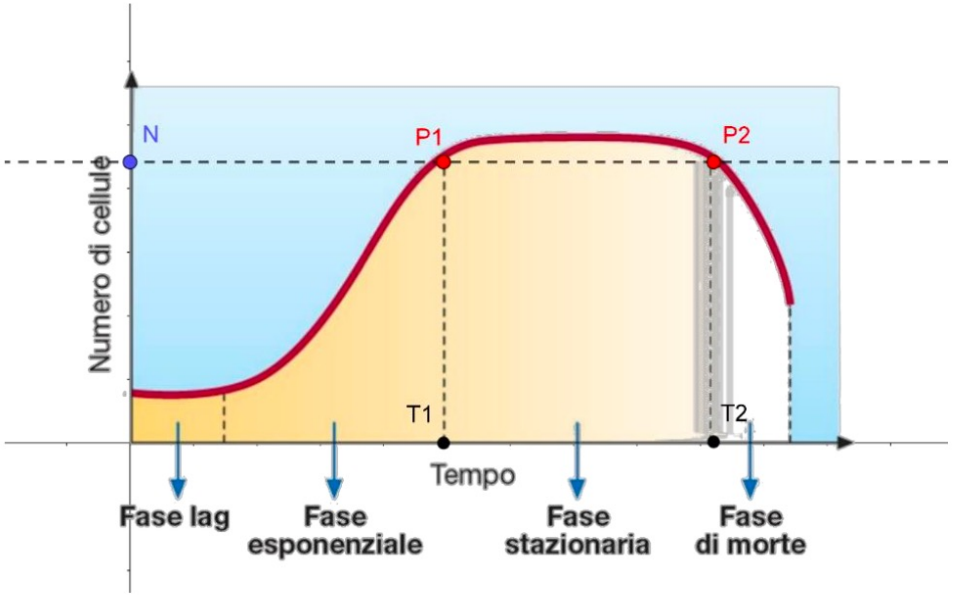
Le funzioni nella vita reale

L'andamento della numerosità di una specifica popolazione cellulare, oggetto del nostro studio, così come anche, ad esempio, l'andamento della crescita di una pianta, può essere espresso da una funzione, che restituisce, al variare del tempo, la numerosità della popolazione.

In questo caso ci sono diverse fasi:

- Fase lag (o di ritardo)
- Fase esponenziale
- Fase stazionaria
- Fase di morte

Le funzioni nella vita reale

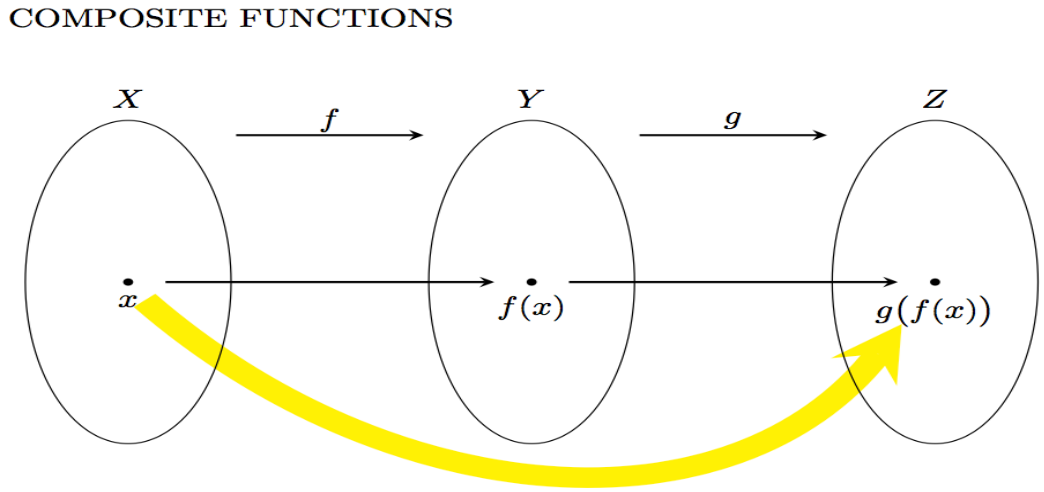


La funzione che esprime la numerosità di una popolazione cellulare non è iniettiva!

Funzione composta

Date due funzioni, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, possiamo definire la funzione composta

$h : X \to Z$, come $h(x) = g(f(x))$.



Funzione composta

Attenzione! Perchè h sia una funzione, quindi per ogni elemento del suo Dominio X esista uno e un solo corrispondente nel suo Codominio Z, occorre che l'insieme Y, che è il dominio della g, non sia semplicemente il Codominio della f, ma che coincida anche con la sua Immagine, $Y = Im(f)$.

Quando definiamo una funzione composta, quindi applichiamo prima una funzione f a un valore x, ottenendo $y = f(x)$ e poi una funzione g al valore z, ottenendo $z = g(y) = g(f(x))$.

Esercizi

Componiamo le funzioni reali a variabile reale $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2$.

- Applichiamo f(x) a g(x):

$f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3$ (sostituendo x^2 al posto di x in f(x))

- Quindi, la funzione risultante dalla composizione è $h(x) = x^2 + 3$.
- In questo caso, in cui non ci sono problemi di Dominio (entrambe le funzioni hanno sia Dominio che Codominio uguale a R), possiamo comporre le due funzioni f e g, applicando stavolta prima g e poi f. Otterremo, in questo caso, una funzione diversa dalla h.

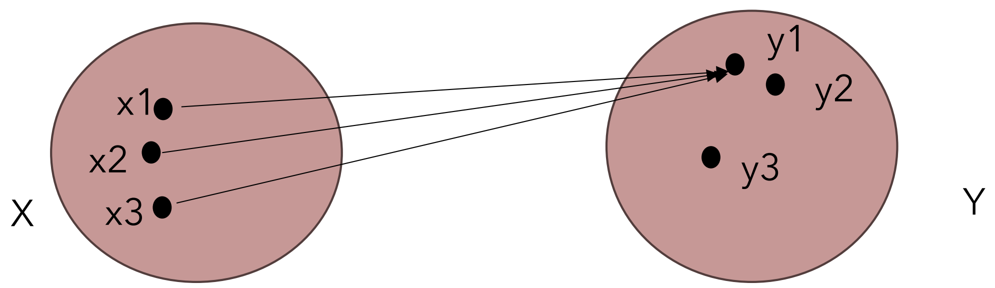
Funzioni monotone o continue a tratti

Le funzioni che in tutto il loro Dominio crescono o decrescono sempre si dicono **monotòne**.

Non tutte le funzioni sono monotòne, nel loro Dominio. Spesso per analizzare come una funzione cresce o decresce occorre suddividere il Dominio in intervalli, osservando in quali intervalli la funzione cresce e in quali decresce.

Funzioni costanti

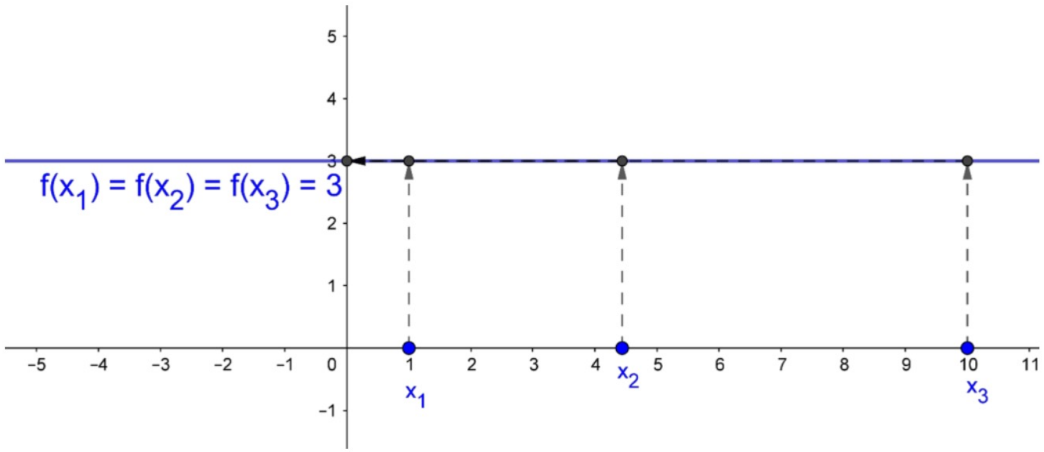
Una particolare funzione è la funzione **costante**, che, ad ogni elemento del Dominio associa sempre lo stesso elemento del Codominio:



f(x)=k

Funzioni costanti

Una funzione reale a variabile reale definita in R, costante, definita da f(x) = k , ha il grafico di una retta parallela all'asse delle x. Infatti, ad ogni numero reale corrisponde sempre il numero k.



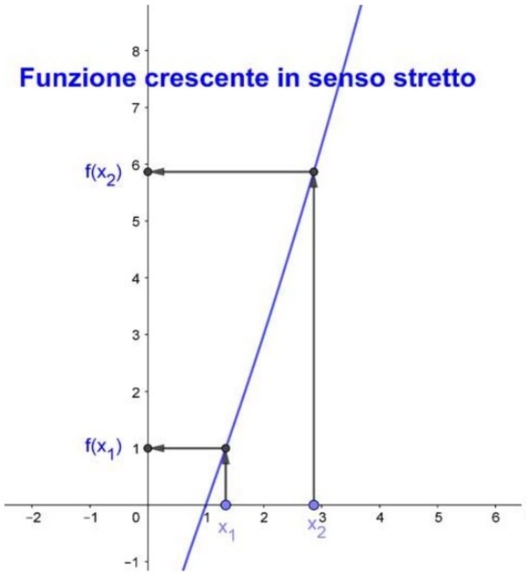
Funzioni crescenti

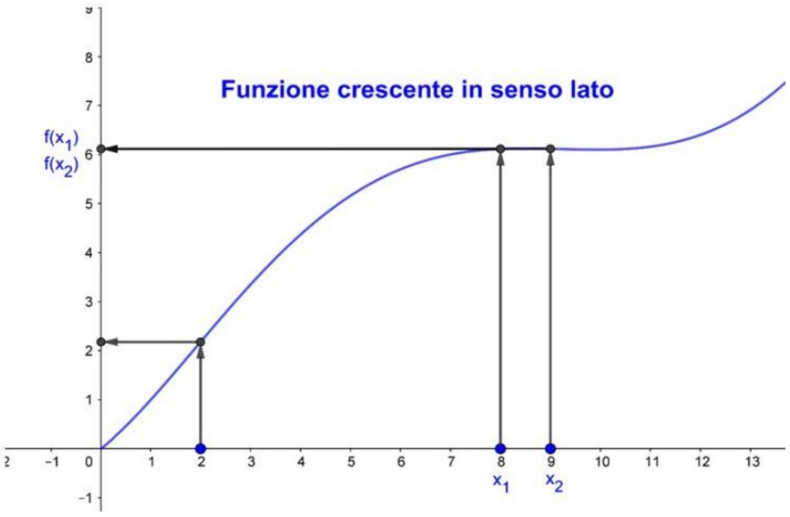
- Data una funzione reale a variabile reale $f : D \rightarrow R$, f si dice **crescente in senso stretto** se per ogni coppia di elementi di D, x_1 ed x_2, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$, cioè a elementi del Dominio crescenti corrispondono elementi dell'immagine crescenti.

- La funzione f si dice **crescente in senso lato** se per ogni coppia di elementi di D, x_1 ed x_2, con $x_1 < x_2$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$, cioè a elementi del Dominio crescenti corrispondono elementi dell'immagine crescenti oppure uguali.

- Le funzioni crescenti sono monotone, mantengono dunque un certo ordine di grandezza tra gli elementi del suo dominio.

Funzioni crescenti



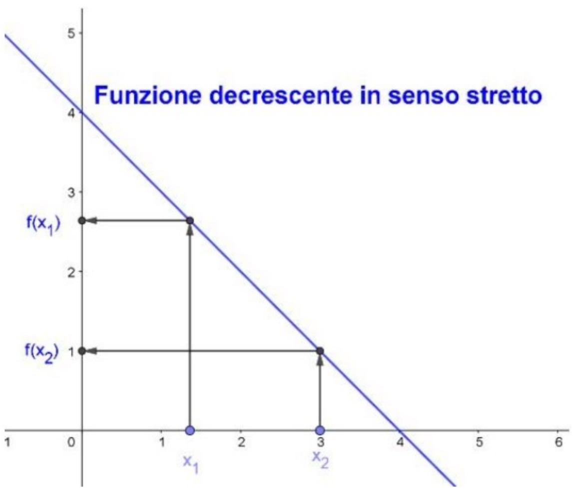


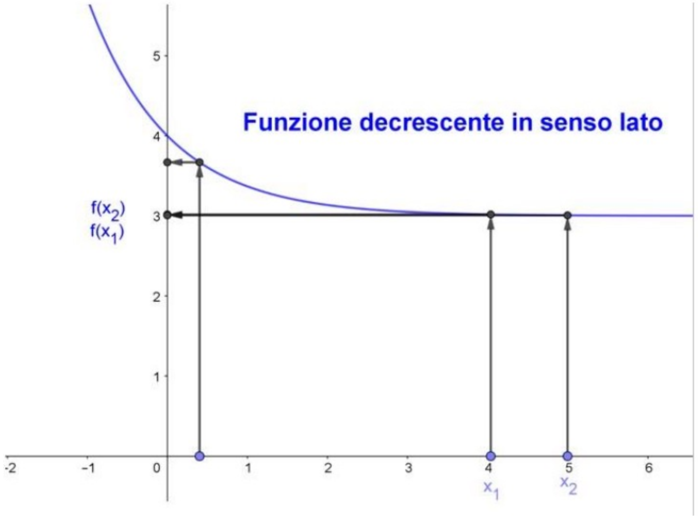
Funzioni decrescenti

- Data una funzione reale a variabile reale $f : D \rightarrow R$, f si dice **decrescente in senso stretto** se per ogni coppia di elementi di D, x_1 ed x_2, con $x_1<x_2$, si ha $f(x_1) > f(x_2)$, cioè a elementi del Dominio crescenti corrispondono elementi dell'immagine decrescenti.

- La funzione f si dice **decrescente in senso lato** se per ogni coppia di elementi di D, x_1 ed x_2, con $x_1<x_2$, si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$ cioè a elementi del Dominio crescenti corrispondono elementi dell'immagine decrescenti oppure uguali.
- Le funzioni decrescenti sono monotòne.

Funzioni decrescenti

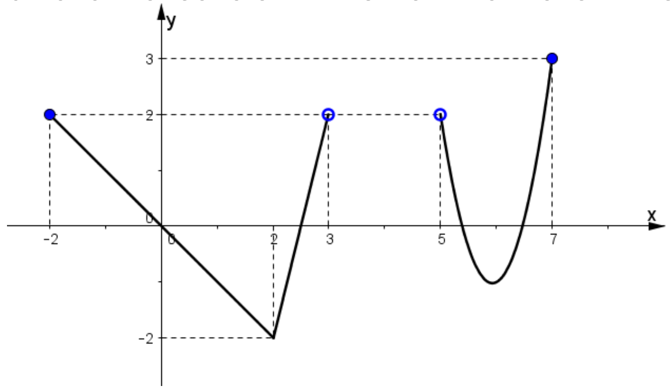




Funzioni continue a tratti

Alcuni fenomeni naturali non possono essere descritti da un'unica funzione. Questo avviene quando ci sono dei punti critici, che possiamo interpretare come soglie, ad di là delle quali il fenomeno cambia comportamento. Ovviamente in natura difficilmente il cambiamento avverrà bruscamente, da un istante all'altro.

E' possibile interpretare cambiamenti di un fenomeno di questo tipo mediante funzioni definite a tratti, cioè funzioni che hanno una diversa definizione in diversi intervalli del Dominio.



Funzioni continue a tratti

In genere funzioni definite a tratti si scrivono con una parentesi graffa. Esempio:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, \; se \; 0 \le x \le 2 \\ 2x-1, \; se \; x > 2 \end{cases}$$

può rappresentare un fenomeno che dall'istante 0 all'istante 2 ha un andamento quadratico e dall'istante 2 in poi un andamento lineare.

Funzioni continue a tratti

In generale:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), se\ x \leq x_0 \\ h(x), se\ x > x_0 \end{cases}$$

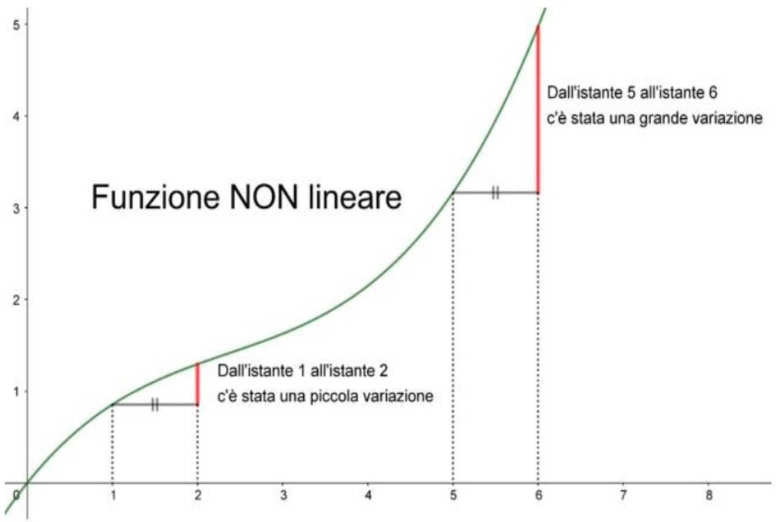
f è continua nel punto $x = x_0$ se $g(x_0) = h(x_0)$.

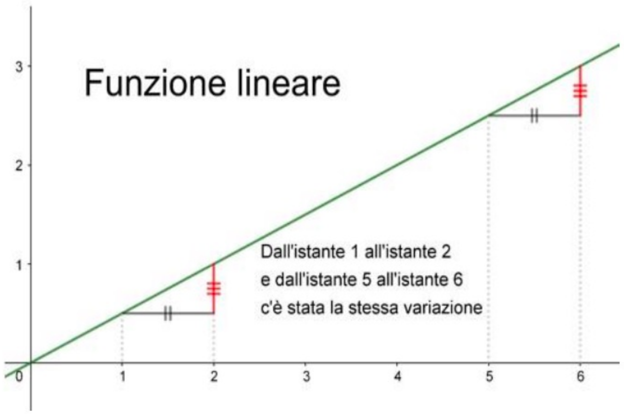
Se invece $g(x_0) \neq h(x_0)$, allora in x_0 c'è una **discontinuità di salto**.

Funzioni lineari

- Nei fenomeni naturali è importante osservare se il fenomeno oggetto di studio è in crescita o in decrescita.
- Questo viene osservato mediante il comportamento di eventuale monotònia della funzione che modellizza il fenomeno.
- Spesso è utile sapere anche QUANTO un fenomeno sia in crescita o in decrescita.
- Questa valutazione può essere fatta facilmente mediante funzioni lineari, cioè **funzioni che sono rappresentate da rette nel piano e che sono espresse analiticamente da una equazione di primo grado.**

Funzioni lineari



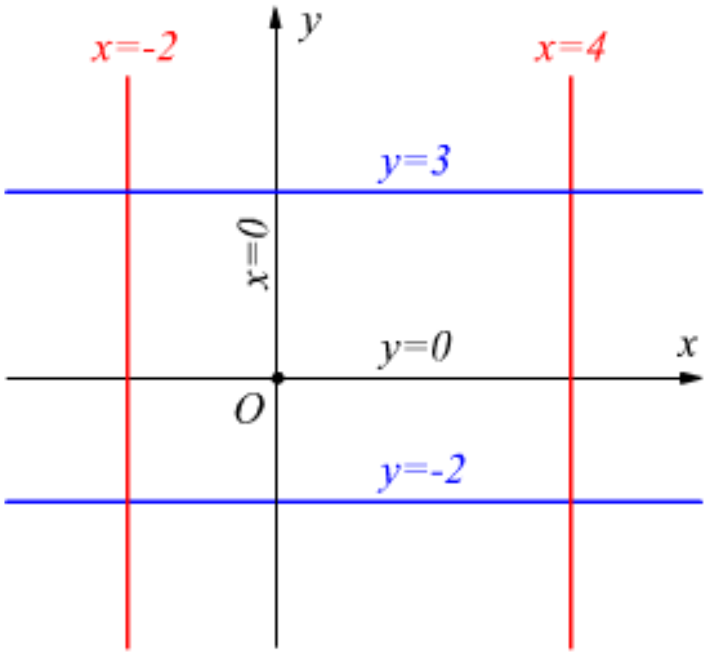


In figura, nella funzione NON lineare a incrementi della x sempre di 1 corrispondono **differenti** incrementi della y; mentre nella funzione lineare a incrementi della x sempre di 1 corrispondono **uguali** incrementi della y.

Funzioni lineari

- Le **funzioni lineari** (espresse analiticamente da equazioni in cui la variabile indipendente compare al più di primo grado) possono tutte essere rappresentate da **rette** nel piano cartesiano.
- *Ma non tutte le rette del piano cartesiano sono funzioni!* Infatti l'asse y e tutte le rette ad esso parallele non rappresentano funzioni, poichè a ogni x del Dominio (che in questo caso sarebbe formato da un solo punto) corrisponderebbero infinite y.
- L'equazione di una retta parallela all'asse y è del tipo x = k, dove k è un numero reale.

Funzioni lineari



- Per esempio, in figura vediamo in rosso 2 rette parallele all'asse y, una di ascissa x=-2 e una di ascissa x=4. Le ordinate corrispondenti sono infinite.

- Analogamente, le due rette in blu sono parallale all'asse x, una ha ordinata y=3 e l'altra y=-2. Le ascisse corrispondenti sono infinite.

- Da questo si evince che **l'equazione dell'asse y è x=0, mentre quella dell'asse x è y=0.**

Funzioni lineari

- Le più semplici funzioni lineari sono quelle rappresentate da rette parallele all'asse x.
- Esse sono funzioni **costanti**. Infatti ad ogni x del Dominio corrisponde sempre una sola y.
- L'equazione di una **retta parallela all'asse x** è del tipo $y = k$, dove k è un numero reale.

Rette passanti per l'origine

- Particolari funzioni lineari sono quelle che associano a x = 0 y =0.
- Le funzioni di questo tipo sono rappresentate da **rette che passano per l'origine del sistema cartesiano** e hanno una espressione analitica del tipo **y = mx**, dove m è un numero reale.
- Nell'equazione che esprime una funzione lineare per l'origine **f(x) = mx** oppure **y = mx**, il

numero reale **m rappresenta la pendenza della retta** e **si chiama coefficiente angolare**.

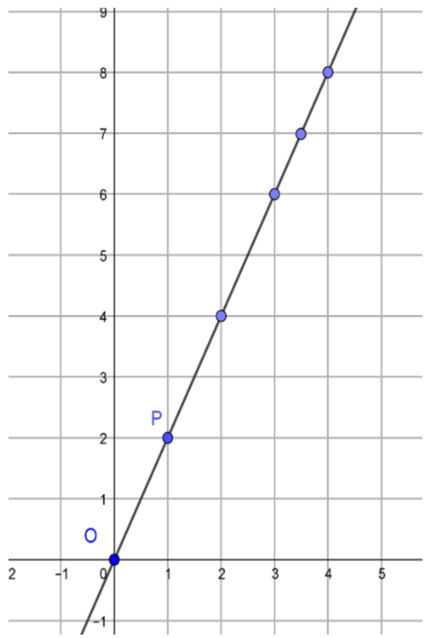
Rette passanti per l’origine

In particolare:

- Se $m > 0$ a incrementi di x corrispondono incrementi di y di mx (**funzione crescente in senso stretto**);
- Se $m = 0$ a incrementi di x non corrispondono incrementi di y (**funzione costante**)
- Se $m < 0$ a incrementi di x corrispondono decrementi di y di $|m|x$ (**funzione decrescente in senso stretto**)

Rette passanti per l’origine

- Consideriamo la retta passante per l’origine e per il punto P ≡ (1,2).
- Tutte le coordinate dei punti della retta OP hanno qualcosa in comune: (2, 4); (3, 6); (3.5, 7); (4, 8).
- Tutte le ordinate (y) sono il doppio delle rispettive ascisse (x), come del resto per il punto (0, 0) e per il punto (1, 2).
- L’equazione di questa retta è y = 2x.
- Questo significa che a incrementi di 1 della x corrispondono sempre incrementi di 2 della y.



Rette passanti per l’origine

- Detto Δx l’incremento della x (differenza delle x) e Δy l’incremento della y (differenza delle y) si ha:

$$\text{coefficiente angolare: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- La lettera Δ (D in greco) sta per la parola «Differenza».
- Rette parallele, avendo la stessa pendenza, hanno lo stesso coefficiente angolare.

Esercizi

1. **Scriviamo l’equazione della retta passante per l’origine e per il punto (2, 6).**

L’equazione è del tipo $y = mx$. Occorre trovare il valore di m. Poichè la retta cercata passa per il punto (2, 6), a un incremento di x di 2 corrisponde un incremento di y di 6.

Allora $m = 6/2 = 3$. L’equazione cercata è $y = 3x$.

2. **Scriviamo l’equazione della retta passante per l’origine e per il punto (4, -8).**

L’equazione è del tipo $y = mx$. Occorre trovare il valore di m. Poichè la retta cercata passa per il punto (4, -8), a un incremento di x di 2 corrisponde un incremento di y di – 8, (un decremento

di 8). Allora $m =-8/4 = -2$. L’equazione cercata è $y = -2x$.

Retta generica

- Una funzione lineare generica ha un’espressione analitica

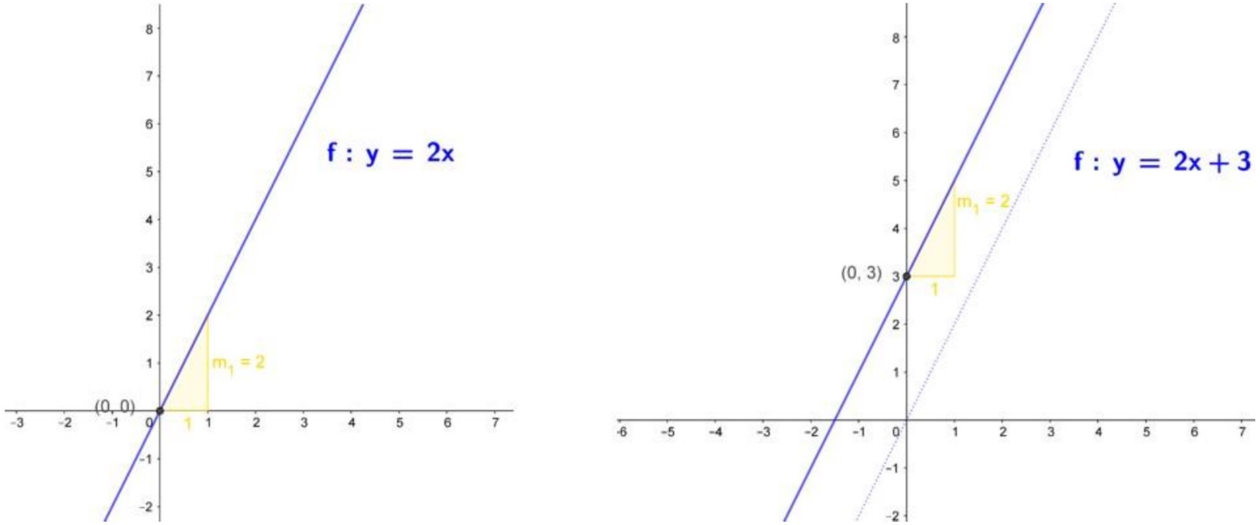
$$\mathbf{y = mx + q}\text{, con m e q numeri reali.}$$

- Se q = 0 ritroviamo una retta per l'origine.
- Per costruire una retta generica prendiamo una retta per l’origine e la trasliamo.

Retta generica

- Per esempio, prendiamo la retta data dalla funzione $f(x) = 2x$.
- Questa funzione lineare associa a $x = 1$, $y = 2 \cdot 1 = 2$.
- Se trasliamo questa retta di 3 unità (cioè sommiamo la funzione $f(x)$ alla funzione costante $g(x) = 3$), otteniamo una nuova funzione $h(x) = 2x + 3$ che associa a $x = 1$, non più $y = 2$, ma $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Retta generica



La retta $y = mx + q$ ha allora la stessa pendenza di $y = mx$ ma è traslata di q. Il numero q si chiama **intercetta** perchè il punto in cui la retta intercetta l'asse delle y è il punto di coordinate $(0, q)$.

Retta per 2 punti

In generale, il metodo per trovare la retta per due punti consiste nel:

- Trovare il coefficiente angolare come $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{yB - yA}{xB - xA}$.

Importante: seguire sempre lo stesso ordine negli incrementi, cioè se si calcola xB – xA si dovrà procedere con yB – yA .

- Trovare l'intercetta q sostituendo le coordinate di uno dei punti all'equazione y = mx + q, in cui si è già sostituito il valore di m, appena trovato.

Retta per 2 punti

Più in generale, l'equazione della retta passante per 2 punti A e B può essere calcolata come segue:

$$\frac{x-xA}{xB-xA}=\frac{y-yA}{yB-yA}$$

Sostituendo a x_A, x_B, y_A e y_B le coordinate dei 2 punti.

Esempio

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti: A=(2,1) e B=(5,7).

Applicando la formula: $\frac{x-xA}{xB-xA} = \frac{y-yA}{yB-yA}$, si ottiene: $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-1}{7-1}$

Da cui: y-1=2(x-2), cioè y=2x-4+1 ovvero y=2x-3.

Funzioni quadratiche

Le funzioni quadratiche, in cui la x compare di secondo grado sono del tipo:

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{y = ax^2 + bx + c}$$

e si possono rappresentare nel piano cartesiano come parabole con asse parallelo all'asse delle y.

Parabola con vertice nell’origine

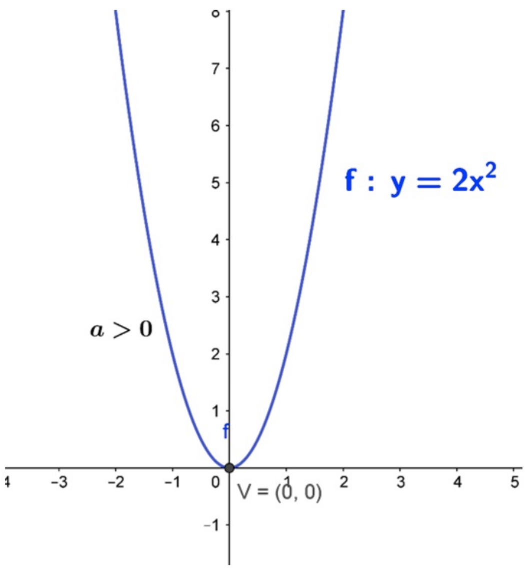
- La più semplice funzione quadratica è la funzione potenza del tipo $\mathbf{y = ax^2}$, con a numero reale.
- Si tratta di una parabola con asse di simmetria l’asse y, quindi è una funzione pari, cioè

$$f(-x) = f(x).$$

- Essa ha vertice nell’origine del sistema cartesiano e il numero a rappresenta l’apertura della parabola.

Parabola con vertice nell'origine

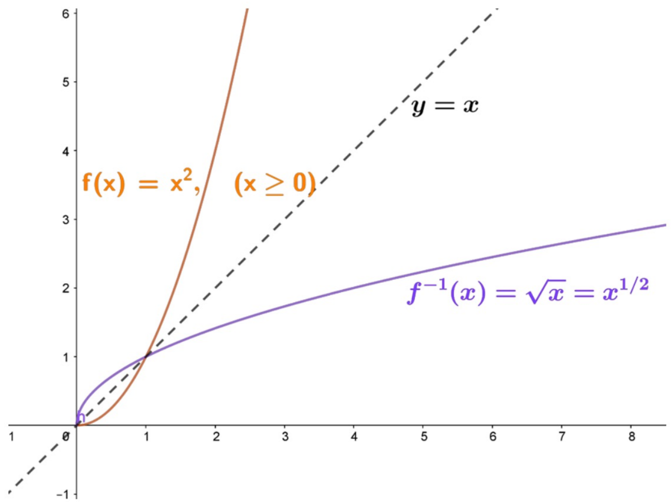
- $a > 0$: la parabola rivolge la concavità verso l'alto;
- $a = 0$: la parabola degenera in una retta (l'asse x in questo caso);
- $a < 0$: la parabola rivolge la concavità verso il basso.



Funzione radice

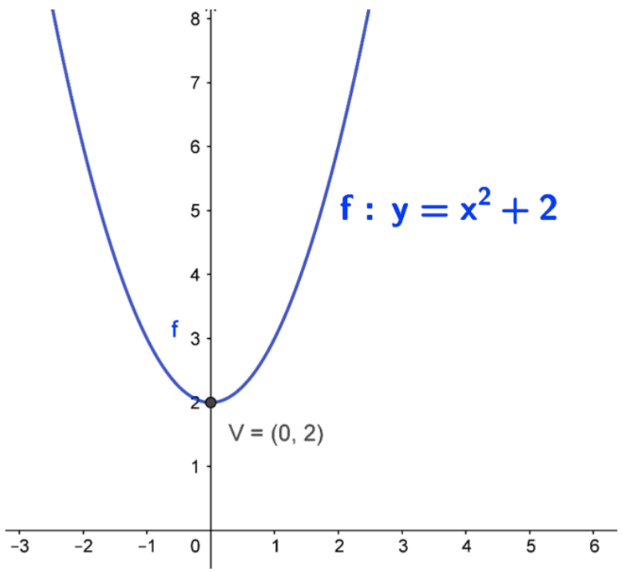
La funzione y=x^2 non si può invertire perchè non è iniettiva, ma la sua restrizione a [0, +∞[

si può invertire e la sua inversa è la funzione radice y=$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.



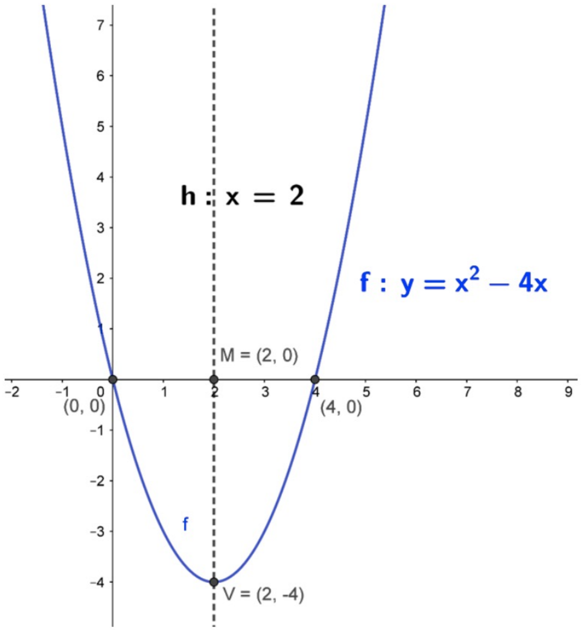
Parabola con asse Y

- La funzione quadratica del tipo $\mathbf{y = ax^2 + c}$ è la somma della funzione $\mathbf{y = ax^2}$ e della costante **c**, pertanto è la parabola $\mathbf{y = ax^2}$ **traslata di c**.
- L'asse di simmetria rimane l'asse y, come nel caso della parabola con vertice in O, ma il vertice da (0,0) diventa il punto $V \equiv (0,c)$.
- a rappresenta sempre l'apertura della parabola e il segno di a ci da la concavità, come nel caso di ax^2.



Parabola con asse verticale

- La funzione quadratica del tipo **$y = ax^2 + bx$** incontra l'asse x nei due punti (0,0) e ($-b/a$, 0), infatti: $ax^2 + bx = x \cdot (ax + b) = 0$ per $x = 0$ e per $x = -b/a$
- Allora l'asse di simmetria, che è parallelo all'asse y, passa per il punto medio tra (0,0) e ($-b/a$,0) , che è ($-b/2a$, 0).
- L'asse di simmetria ha allora equazione $x = -b/2a$
- E il vertice ha come ascissa $x_V = -b/2a$.
- L'ordinata di V può essere calcolata come $y(x_V)$.



Parabola generica

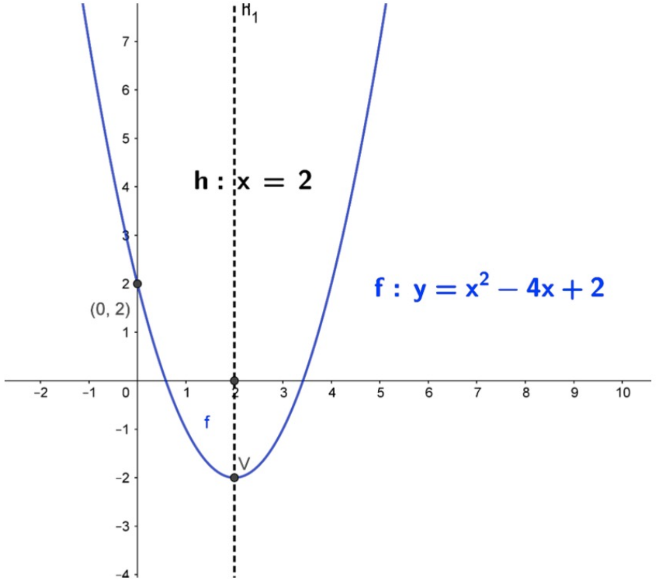
- La funzione quadratica del tipo $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ è la somma della funzione $\mathbf{y = ax^2 + bx}$ e della costante **c**, pertanto è la parabola $\mathbf{y = ax^2 + bx}$ **traslata di c**.
- L'asse di simmetria e l'ascissa del vertice non cambiano rispetto a $y = ax^2 + bx$.
- Allora la parabola generica con asse verticale, dall'equazione $y = ax^2 + bx + c$, ha:

Asse di simmetria $x = -b/2a$

Ascissa del vertice $x_V = -b/2a$.

Ordinata del vertice da calcolare come $y(x_V)$.

- Notiamo, infine, che **c rappresenta l'intercetta**.



Esempio

Rappresentiamo la funzione $y = x^2 – x – 6$.

Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse y. Il suo asse di simmetria ha equazione $x = -b/2a = -(-1)/2*1 = 1/2$.

L'ascissa del suo vertice è allora $x_V = 1/2$, l'ordinata del vertice è $y(x_V) = (1/2)^2 - (1/2) - 6 = -25/4$.

L'intercetta è -6, quindi la parabola passa dal punto $(0,-6)$.

Troviamo i punti in cui la parabola interseca l'asse x, così da trovare gli intervalli in cui la parabola risulta positiva (cioè sopra l'asse x) e quelli in cui risulta negativa (cioè sotto l'asse x).

Per trovare i punti in cui la parabola interseca l'asse x risolviamo l'equazione di secondo grado

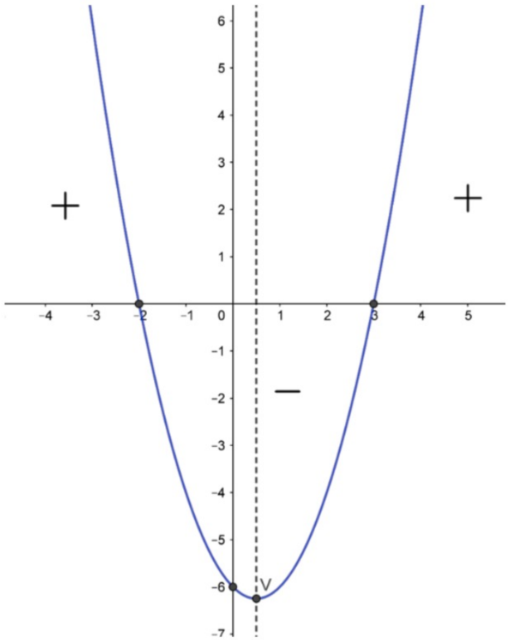
$x^2 – x – 6 = 0$, in cui $a = 1$; $b = -1$; $c = -6$.

Esempio

$$\mathrm{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \longrightarrow \mathrm{x}_1 = 3, \mathrm{x}_2 = -2.$$

Poichè a>0, la parabola volge la concavità verso l'alto, quindi sarà positiva prima di -2 e dopo 3, e negativa tra -2 e 3.

Esempio

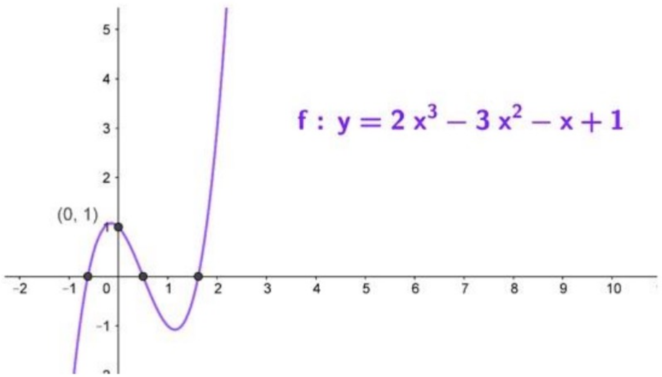


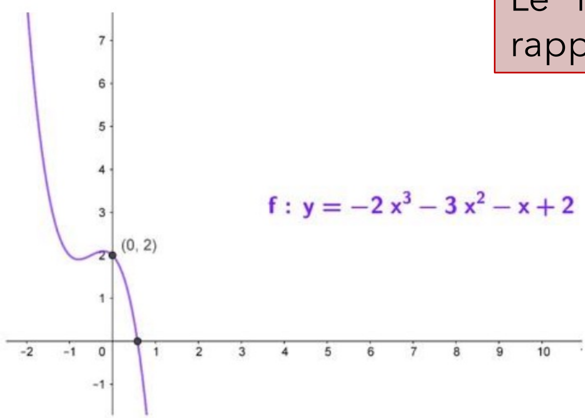
Le funzioni quadratiche servono a rappresentare delle superfici

Funzioni cubiche

- In generale una **funzione cubica** ha una espressione del tipo $\mathbf{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$.
- Una funzione cubica ha tratti crescenti e tratti decrescenti. Le sue intersezioni con l'asse x possono essere 3. L'intersezione con l'asse y è il punto (0, d).

Le funzioni cubiche servono a rappresentare dei volumi

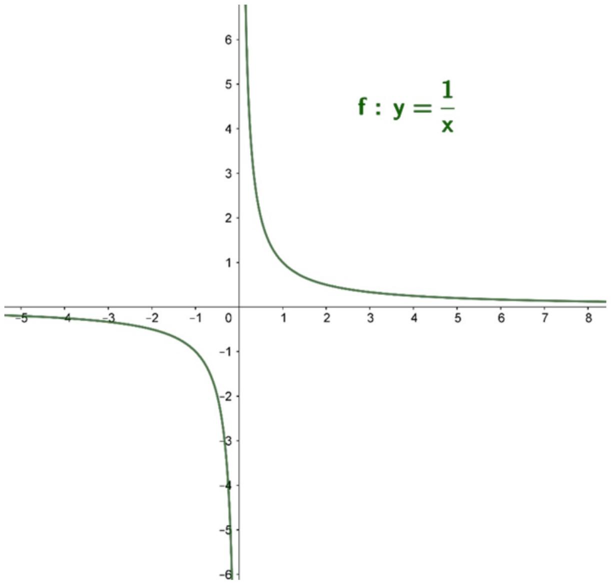




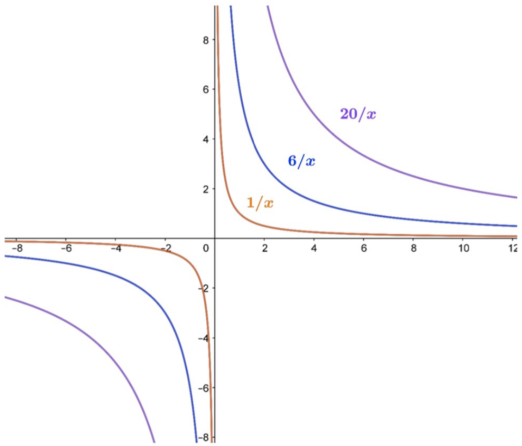
Iperbole equilatera

- L'iperbole equilatera riferita agli asintoti, è rappresentata dalla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, il cui Dominio esclude dall'insieme dei numeri reali il solo x=0, dato che non si può dividere per 0.
- Si tratta di una funzione dispari, cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine, poichè $f(-x) = -f(x)$.
- Si tratta di una funzione decrescente in senso stretto perchè se $x_1<x_2$ allora $1/x_1>1/x_2$
- Per valori di x molto grandi la y tende ad assumere valori molto piccoli, perchè dividendo per numeri grandi, y tende a zero.
- Viceversa per valori di x molto piccoli, cioè vicini a zero, la y tende ad assumere valori molto grandi, perchè dividendo per numeri piccoli, y tende a infinito.

Iperbole equilatera



Anche una funzione del tipo $f(x) = \frac{a}{x}$ è un'iperbole equilatera riferita agli asintoti. Il numero a rappresenta **l'apertura dell'iperbole**.

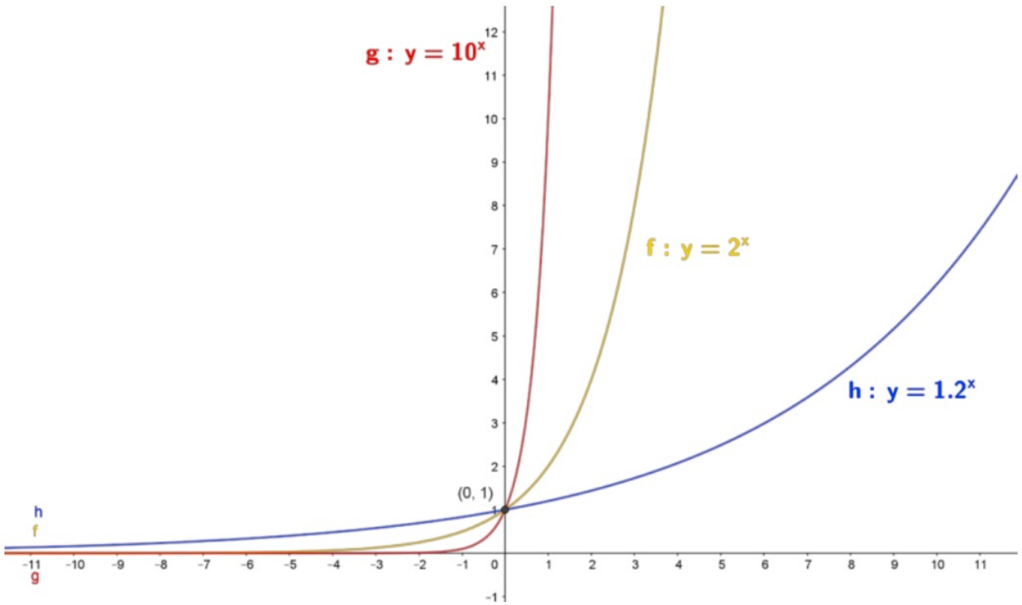


Le iperboli equilatere servono a rappresentare fenomi con proporzionalità inversa

Funzioni esponenziali

- Una funzione esponenziale è del tipo $f(x) = a^x$, dove la base a si suppone sempre positiva.
- Se a = 1, la funzione diventa costante $f(x)$ = 1.
- Se a > 1, la funzione è strettamente crescente.
- Proviamo a rappresentarla graficamente, considerando per esempio a = 2:
- In x = 0, abbiamo $f(0) = a^0$ = 1 qualunque sia il valore di a.
- Per x positive, $f(x)$ sarà sempre maggiore di 1. Al crescere di x la $f(x)$ cresce molto.
- Per x negative, $f(x)$ sarà sempre minore di 1. Al decrescere di x, cioè per valori che tendono a -∞, la $f(x)$ tenderà ad assumere valori sempre più vicini allo zero.

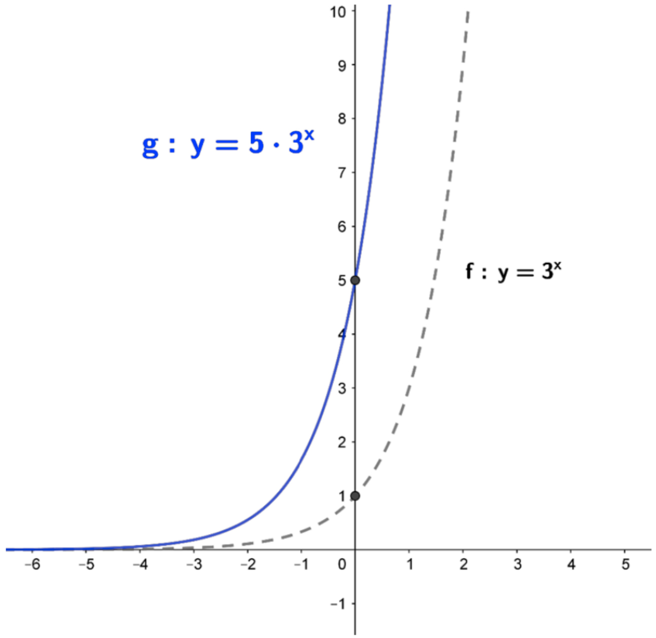
Funzioni esponenziali



Funzioni esponenziali

Funzioni esponenziali del tipo $f(x) = b \cdot a^x$ hanno un andamento simile ad a^x ma invece di passare per il punto (0,1), passano per il punto (0,b).

Le funzioni esponenziali servono a rappresentare quei fenomeni caratterizzati da crescita/decrescita esponenziale

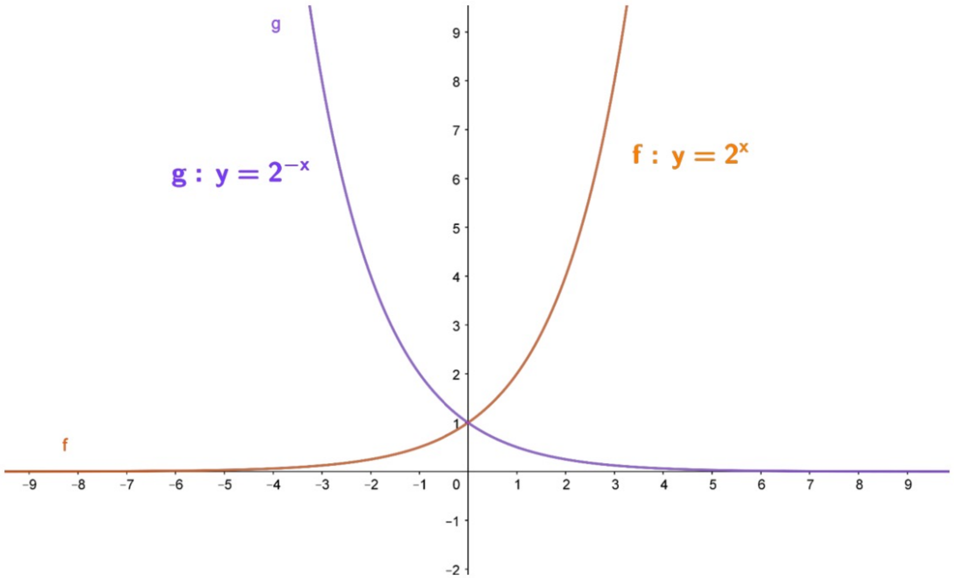


Il numero *e*

- L'andamento di funzioni esponenziali crescenti (per $a > 1$) è quindi sempre sostanzialmente lo stesso.
- Le basi maggiori di 1 più utilizzate sono 2, 10, *e*. Il numero $e = 2{,}71828\ldots$ è un numero irrazionale (quindi con infinite cifre decimali), detto **Numero di Nepero** o **Numero di Eulero**, e riveste in matematica un ruolo molto importante.
- Il numero $e = 2.718281828459045235 36\ldots$ che possiamo approssimare a $e \approx 2.72$, ci consente di esprimere tutti i numeri positivi con esponenti ragionevoli (cioè nè eccessivamente grandi nè eccessivamente piccoli).

Segno dell’esponente

- Si noti che cambiando segno all’esponente di una funzione esponenziale, la funzione cambia completamente il suo andamento.
- Infatti, se, per esempio, $f(x) = 2^x$ è una funzione esponenziale crescente, siccome $2^{-x} = (1/2)^x$, la funzione $g(x) = 2^{-x}$ è esponenziale decrescente.



Logaritmi e funzioni logaritmiche

- In generale, dati due numeri positivi $a \neq 1$, detta **base**, e b, detto **argomento**, il **logaritmo in base a di b è l'esponente da dare ad a per ottenere b.**
- Ad esempio, $\log_3(9) = 2$, perchè $3^2 = 9$.
- Notiamo che il logaritmo $\log_a(b)$ è un numero negativo se: $a>1$ e $0<b<1$ oppure se $0<a<1$ e $b>1$. Infatti quando l'esponente di una potenza è negativo, da una base maggiore di 1 si passa a una frazione minore di 1 e viceversa, da una frazione minore di 1 si passa a un numero maggiore di 1.
- Il logaritmo $\log_a(b)$ è un numero positivo se a e b (che, ricordiamo, sono positivi) sono entrambi maggiori o entrambi minori di 1.
- Nota, in particolare, che l'esponente (quindi il logaritmo) è zero quando l'argomento è 1. Quindi qualunque sia a, $\log_a(1) = 0$.

Proprietà dei logaritmi

1. $\boldsymbol{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$

   cioè il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi;

2. $\mathbf{\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y}$

   cioè il logaritmo del quoziente è uguale alla differenza dei logaritmi;

3. $\boldsymbol{\log_a(x^p) = p \cdot \log_a x}$

   cioè l'esponente di x elevato a p è uguale a p volte il logaritmo di x.

4. Inoltre, vale la formula del Cambiamento di base:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ con } c>0$$

Proprietà dei logaritmi

Le basi più usate per i logaritmi sono la base 10 e la base *e*.

Per esse esiste una notazione specifica:

- **$\log x = \log_{10} x$**, cioè quando non si esprime la base si intende che sia 10.
- **$\ln x = \log_e x$**, cioè quando si scrive *ln*, **logaritmo naturale**, si intende che la base sia *e*.

Esercizi

- **Calcoliamo il $\log_4(128)$.**

- Purtroppo 128 non è potenza di 4 (cioè non esiste un numero intero n tale che $4^n = 128$), ma poichè sia 4 che 128 sono potenze di 2, conviene usare la formula del cambiamento di base: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, scegliendo la base 2. Si ha: $\log_4 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 4} = 7/2$.

- **Calcoliamo $\log_2(5) + \log_2(6) - \log_2(15)$.**

- Applicando le proprietà 1. e 2. si ottiene:

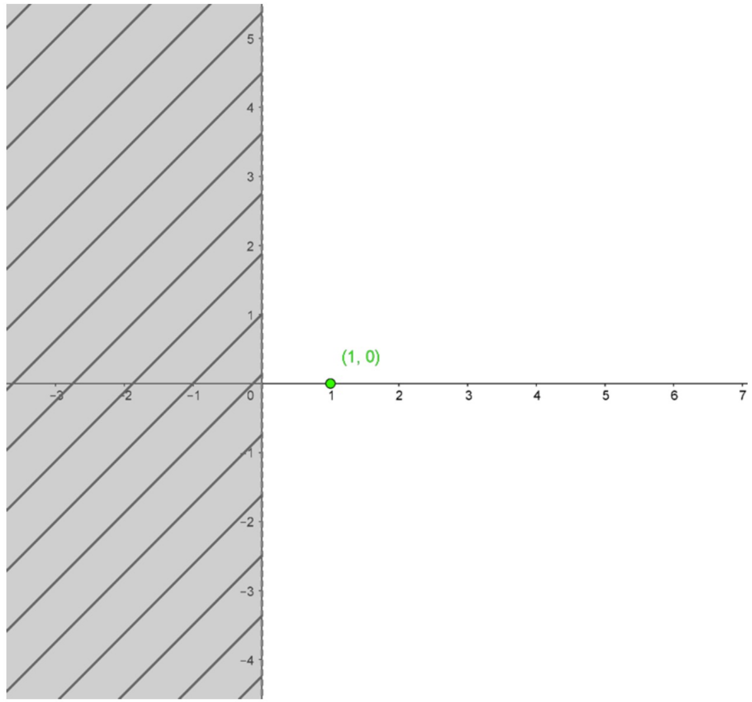
  $\log_2(5) + \log_2(6) - \log_2(15) = \log_2(30/15) = \log_2(2) = 1$.

Funzione logaritmo

- La funzione $f(x) = \log_a(x)$ oppure $y = \log_a(x)$, con $a > 0$ e $a \neq 1$ è una funzione che associa ad ogni x del Dominio il logaritmo in base a di x.
- Quindi, ad esempio, se a = 2, la funzione $f(x) = \log_2(x)$ associa ad ogni x l'esponente da dare a 2 per ottenere x.
- Per rappresentare graficamente la funzione $f(x) = \log_a(x)$ osserviamo prima di tutto che qualunque sia a, l'argomento di un logaritmo è necessariamente un numero positivo, perchè elevando a una certa potenza un numero positivo (la base a) si ottiene sempre un numero positivo.
- Quindi il Dominio della funzione f(x) = loga(x) è R+.
- Inoltre si ha che qualunque sia a, $f(1) = \log_a(1) = 0$ poichè ogni numero a elevato a zero fa 1.

Funzione logaritmo

Allora tutte le funzioni logaritmo del tipo $\log_a(x)$, qualunque sia a, si rappresentano graficamente su un grafico cartesiano nel semipiano delle x positive, e passano tutte dal punto (1,0).

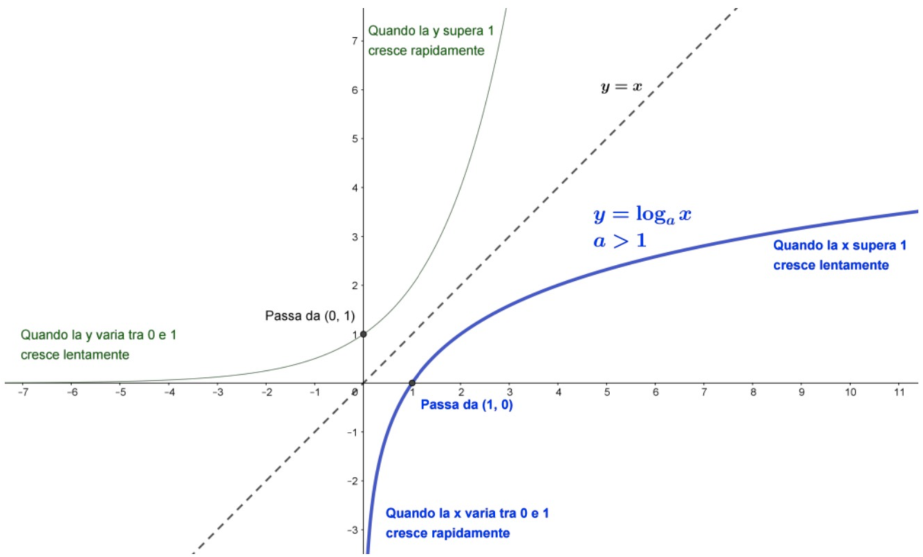


Funzione logaritmo

- Dato che il logaritmo è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza, la funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale, e quindi il suo grafico sarà semplicemente il simmetrico del grafico di una funzione esponenziale rispetto alla retta $y = x$.
- A livello grafico, in sostanza basterà scambiare il ruolo della x con quello della y.

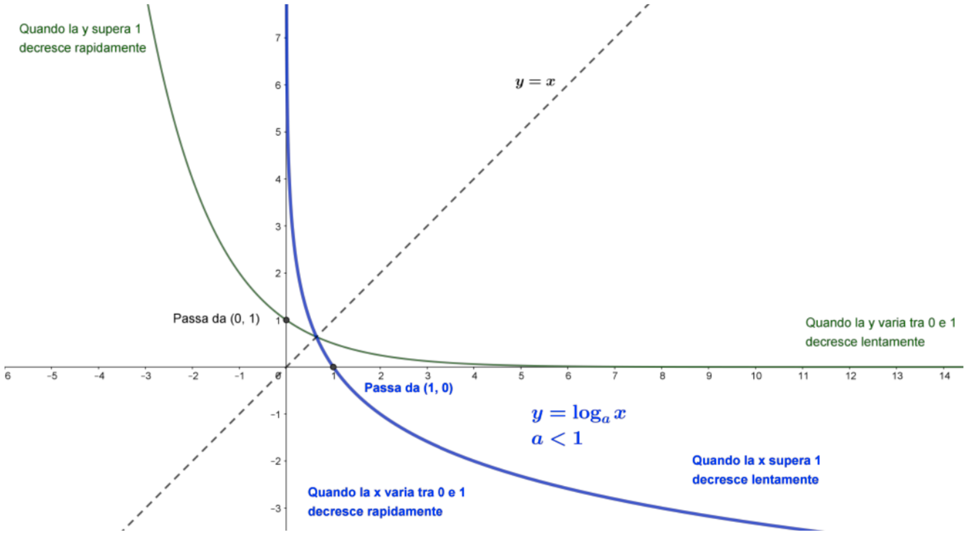
Funzione logaritmo

Ecco il grafico della funzione $f(x) = \log_a(x)$ quando $a > 1$ (per esempio $\log_2(x)$):



Funzione logaritmo

Ecco il grafico della funzione $f(x) = \log_a(x)$ quando $a<1$ (per esempio $\log_{½}(x)$):



La funzione logaritmo

In ogni caso la funzione logaritmo:

- varia sempre rapidamente per x che varia tra 0 e 1

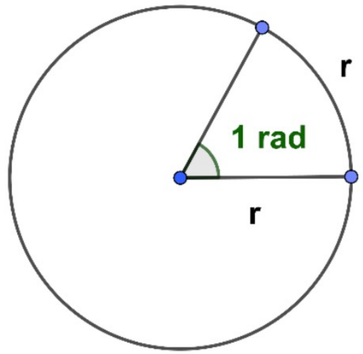
  (cresce rapidamente se $a > 1$, decresce rapidamente se $a < 1$);
- per $x = 1$, vale sempre 0, quindi passa da $(1,0)$;
- varia sempre lentamente quando x supera 1

  (cresce lentamente se $a > 1$, decresce lentamente se $a < 1$).

Le funzioni logaritmiche servono a modellizzare quei fenomeni che inizialmente hanno una crescita importante, ma che col passare del tempo crescono molto lentamente.

Goniometria e funzioni goniometriche

- La goniometria è lo studio degli angoli.
- Di solito gli angoli si misurano in gradi, ma in goniometria come unità di misura si preferisce usare **il radiante**.
- L'uso del radiante agevola moltissimo i calcoli con gli angoli, al contrario l'uso di multipli e sottomultipli del grado li complica moltissimo.
- Se consideriamo una circonferenza di raggio r, si definisce radiante l'angolo al centro che insiste su un arco di lunghezza uguale al raggio r:



Radianti

- Un angolo α misurato in radianti si definisce come il rapporto tra la lunghezza dell'arco su cui insiste l'angolo α e il raggio della circonferenza.
- Formule di conversione tra gradi e radianti:

$$\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°}\,\alpha_{\circ}, \qquad \alpha_{\circ} = \frac{180°}{\pi}\,\alpha_{rad}$$

Esercizi

- **Trasformiamo l'unità di misura di un angolo di 30° da gradi a radianti**.

  Abbiamo $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°} 30\,° = \frac{\pi}{6}$

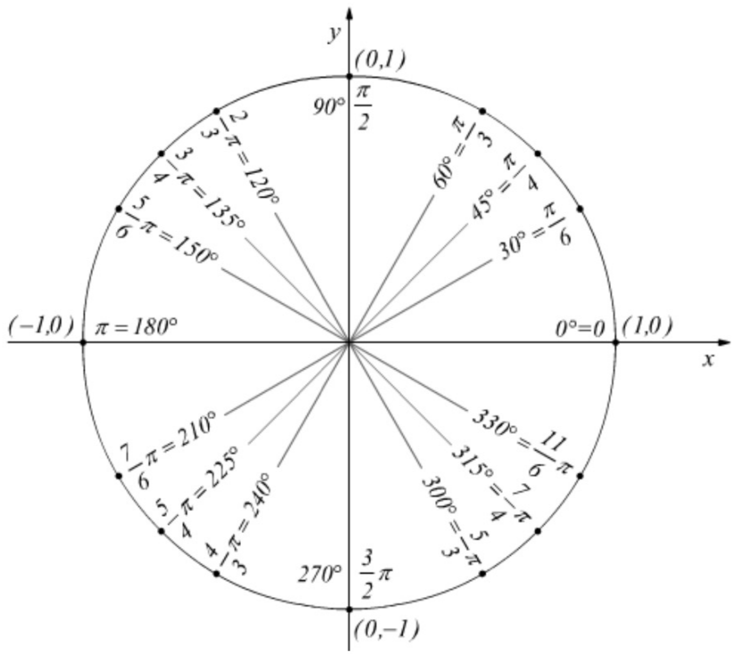
- **Calcoliamo la lunghezza dell'arco che insiste su un angolo α di 60° in una circonferenza di raggio r=3.**

- Poichè l'angolo in radianti è $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°} 60\,°$, e si ha che $\alpha = \frac{l}{r}$, abbiamo l=$\alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \cdot 3 = \pi$

  (quindi circa 3.14).

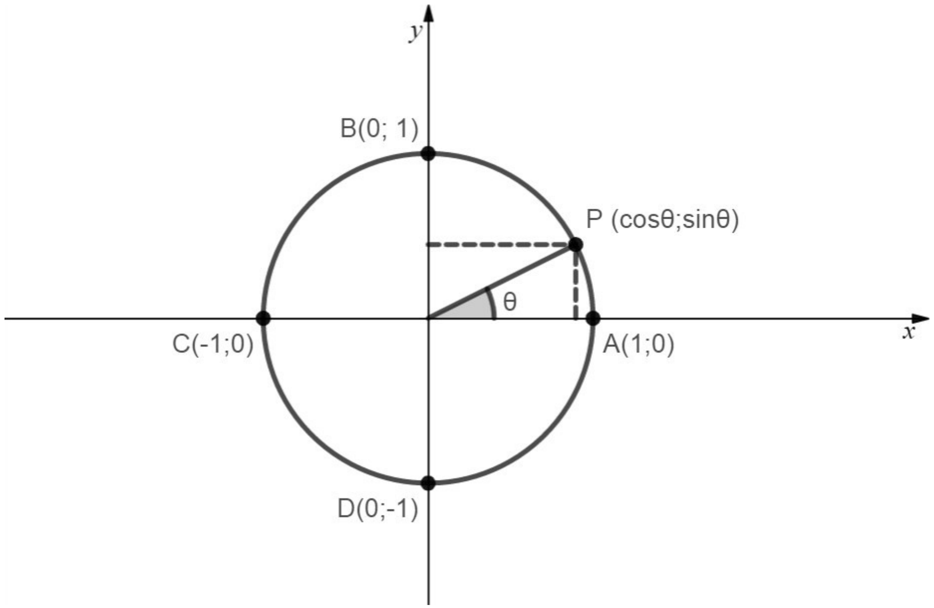
Radianti

- Ecco alcune corrispondenze tra angoli e radianti.
- Si noti che, poichè una circonferenza è lunga 2 π r :
  - L'angolo giro di 360° misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$
  - L'angolo piatto di 180° misura π
  - L'angolo retto di 90° misura $\frac{\pi}{2}$



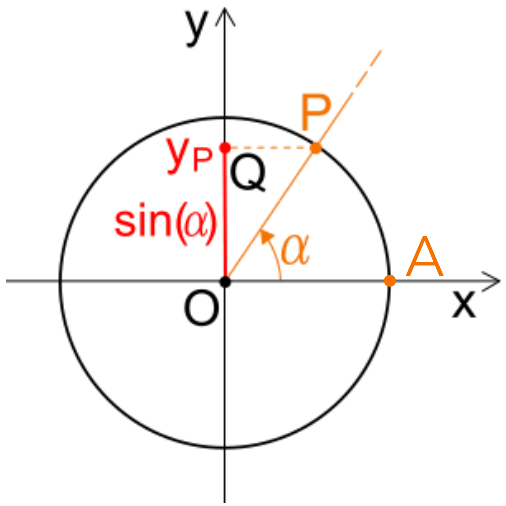
Circonferenza goniometrica

- La circonferenza di centro l'origine del sistema e raggio 1 è detta **circonferenza goniometrica**.
- Convenzionalmente si prende il punto A di coordinate (1, 0) come origine degli archi e scegliamo il senso antiorario per spazzare gli angoli.



Seno di un angolo

Data una circonferenza goniometrica, consideriamo un punto P sulla circonferenza, sarà così dato un arco AP, che spazza un angolo α (convenzionalmente in senso antiorario).
L'ordinata del punto P è detta seno di α e si scrive sen(α).



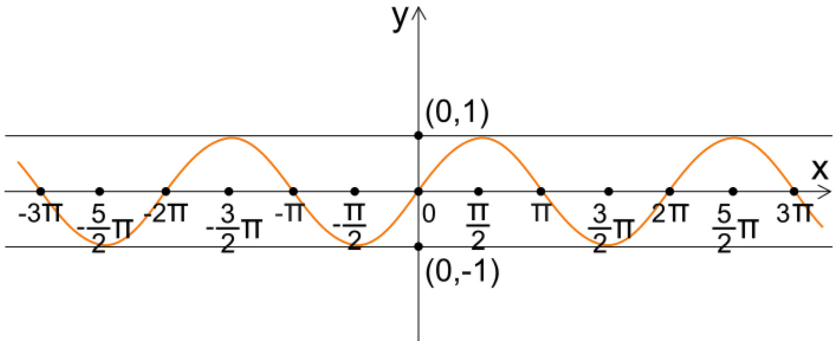
Poichè il raggio della circonferenza goniometrica è 1 il massimo valore che il seno può raggiungere è di 1 (a 90°, cioè $\pi/2$), mentre il minimo valore che il seno può raggiungere è -1 (a 270°, cioè 3/2 π).

sen(0) = 0
sen (π/2) = 1
sen (π) = 0
sen (3/2 π) = -1
sen (2π) = 0

Funzione seno

Si può definire il seno anche di un angolo maggiore di 2 π (e anche di un angolo negativo). È subito chiaro che i valori del seno si ripeteranno ciclicamente, perchè **angoli che differiscono di un multiplo di 360° (di 2 π), hanno lo stesso valore del seno.**
Possiamo allora definire una funzione reale a variabile reale che ad ogni numero reale x (l'angolo espresso in radianti) associa il valore del seno dell'angolo x.

Ecco il grafico della funzione y = sen(x):



Funzione seno

- La funzione sen(x) è limitata da -1 a 1, cioè la sua Immagine è l'intervallo [-1, 1].
- Inoltre la funzione sen(x) è periodica di periodo 2 π, cioè sen(x + 2k π) = sen (x) con k numero relativo.

> Le funzioni goniometriche servono a modellizzare quei fenomeni che si ripetono con periodicità

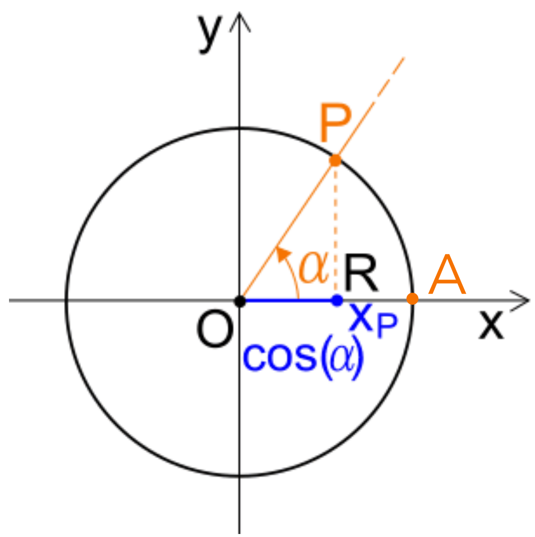
- La funzione seno non è iniettiva e quindi non invertibile. E' possibile però invertire delle sue restrizioni, per esempio nell'intervallo [- $\pi/2$, $\pi/2$].
- L'inversa della funzione seno in questo intervallo è la funzione arcsen(x), con D=[-1, 1], che ad ogni numero compreso tra -1 e 1 associa l'arco compreso tra - $\pi/2$ e $\pi/2$ il cui seno è x.
- Per esempio, arcsen(1)= $\pi/2$, arcsen(0)=0.

Coseno di un angolo

Data una circonferenza goniometrica, consideriamo un punto P sulla circonferenza, sarà così dato un arco AP, che spazza un angolo α (convenzionalmente in senso antiorario). **L'ascissa del punto P è detta coseno di α e si scrive cos(α).**

Poichè il raggio della circonferenza goniometrica è 1 il massimo valore che il coseno può raggiungere è di 1 (a 0°), e il minimo valore che il coseno può raggiungere è -1 (a 180°, cioè π).

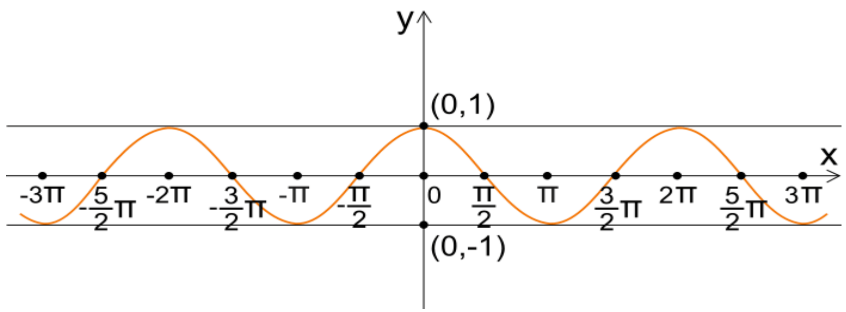
$\cos(0) = 1$
$\cos(\pi/2) = 0$
$\cos(\pi) = -1$
$\cos(3/2\,\pi) = 0$
$\cos(2\pi) = 1$



Funzione coseno

Si può definire il coseno anche di un angolo maggiore di 2 π (e anche di un angolo negativo). È subito chiaro che i valori del coseno si ripeteranno ciclicamente, perchè **angoli che differiscono di un multiplo di 360° (di 2 π), hanno lo stesso valore del coseno.**
Possiamo allora definire una funzione reale a variabile reale che ad ogni numero reale x (l'angolo espresso in radianti) associa il valore del coseno dell'angolo x.

Ecco il grafico della funzione y = cos(x):

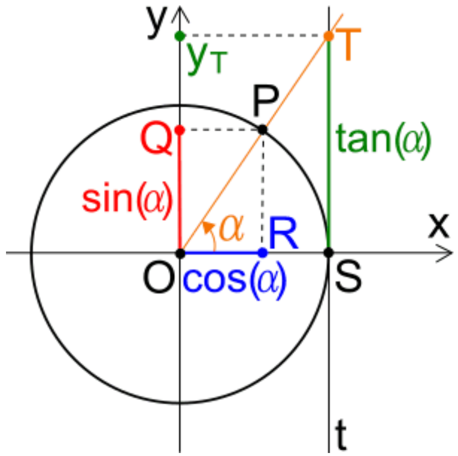


Funzione coseno

- Anche la funzione cos(x) è limitata da -1 a 1, cioè la sua Immagine è l'intervallo [-1, 1].
- Anche la funzione cos(x) è periodica di periodo 2 π, cioè cos(x + 2k π) = cos (x) con k numero relativo.
- Anche la funzione coseno non è iniettiva e quindi non è invertibile, ma è possible invertire le sue restrizioni, per esempio nell'intervallo [0, π].
- L'inversa della funzione cos(x) ristretta in questo intervallo è la funzione arccos(x), con D=[-1,1], che ad ogni numero tra -1 e 1 associa l'arco compreso tra 0 e π il cui coseno è x.
- Per esempio, arccos(1)=0, arcocos(0)= π/2.

Tangente di un angolo

Data una circonferenza goniometrica, consideriamo un punto P sulla circonferenza, sarà così dato un arco SP, che spazza un angolo α (convenzionalmente in senso antiorario). Consideriamo la retta tangente alla circonferenza nel punto S, origine degli archi e consideriamo, se esiste, il punto T di intersezione tra tale tangente e la retta OP.



L'ordinata del punto T è detta tangente di α e si scrive tan(α) oppure tg(α).

$$tg(0) = \frac{sen(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$tg(\pi/2) = \frac{sen(\pi/2)}{\cos(\pi/2)} = \frac{1}{0}\text{, pertanto la tangente a } \pi/2 \text{ non esiste}$$

$$tg(\pi) = \frac{sen(\pi)}{\cos(\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

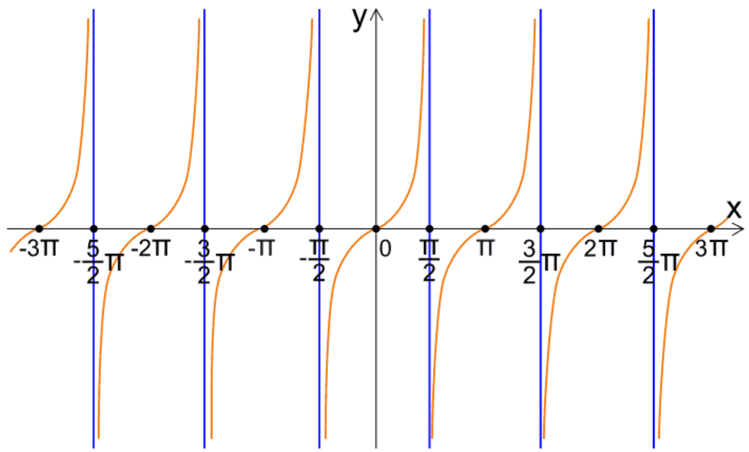
$$tg\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{sen\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{\cos(\frac{3}{2}\pi)} = \frac{-1}{0}\text{, pertanto la tangente a } 3/2\ \pi \text{ non esiste}$$

$$tg(2\pi) = \frac{sen(2\pi)}{\cos(2\pi)} = \frac{0}{1} = 0$$

Funzione tangente

Anche per la tangente, come per il seno e il coseno, si può definire una funzione reale a variabile reale che **ad ogni numero reale x del Dominio (l'angolo espresso in radianti) associa il valore della tangente dell'angolo x**. Dal Dominio occorre escludere tutti i valori $\pi/2 + k\pi$, con k numero relativo, cioè tutti i valori multipli di $\pi/2$ e $3/2\,\pi$.

Ecco il grafico della funzione y = tg(x):



Mentre seno e coseno sono periodiche di 2π, la tangente è periodica di π.

Tabella valori

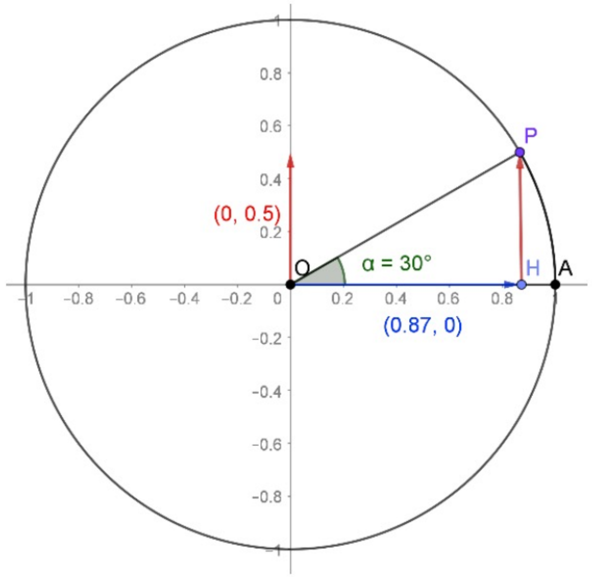
Tabella dei valori

gradi	Rad.	senα	cosα	tgα	gradi	Rad.	senα	cosα	tgα
0°	0	0	1	0	180°	π	0	-1	0
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	210°	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	225°	$5\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	240°	$4\pi/3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	N.D.	270°	$3\pi/4$	-1	0	N.D.
120°	$2\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	300°	$5\pi/3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	315°	$7\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	330°	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

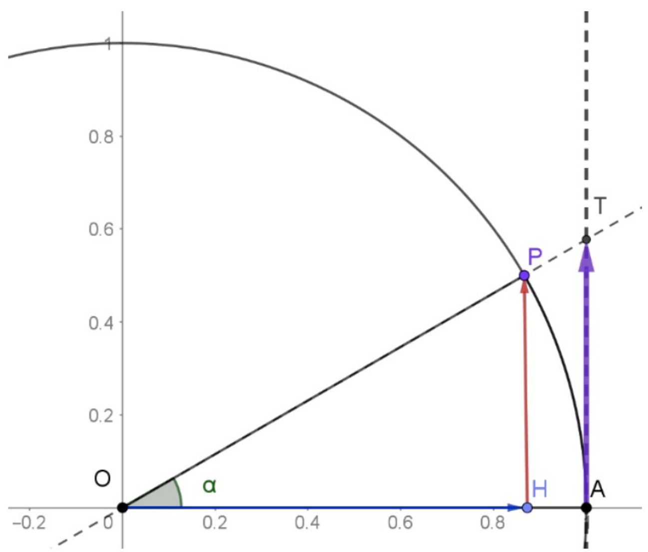
Relazioni fondamentali della goniometria – prima relazione

Dato un angolo α, il seno e il coseno di α sono I due cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa 1 (il raggio OP). Quindi, applicando il Teorema di Pitagora:

$$\mathbf{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$



Relazioni fondamentali della goniometria – seconda relazione



Consideriamo I due triangoli OPH e OTA.
Essi sono simili, perchè entrambi rettangoli, hanno l'angolo α in comune e quindi anche gli angoli in P e in T sono congruenti. Allora anche i rispettivi lati saranno proporzionali. Questo significa che:

PH : OH = TA : OA

Ma: PH = sin α, OH = cos α, TA = tan α, OA = raggio = 1, quindi:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)}{1}$$

Da cui:

$$\boldsymbol{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Parte 2

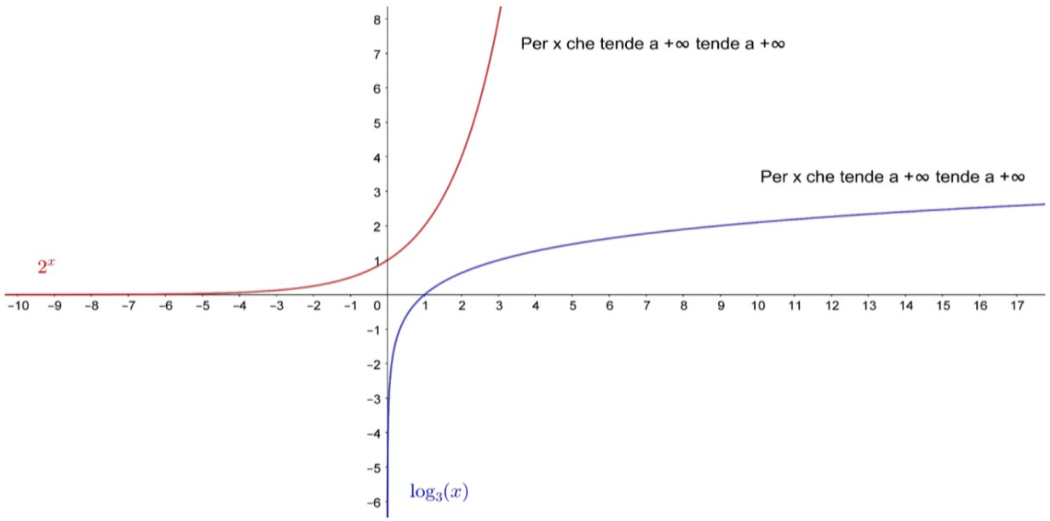
I limiti

Comportamento asintotico di una funzione

- Per **comportamento asintotico** di una funzione f(x) si intende descrivere il comportamento di f(x) quando la variabile indipendente x assume valori molto grandi, cioè tende a $+\infty$, oppure a $-\infty$.
- Se per x che tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$, una funzione tende a ∞ la funzione si dice **divergente** (positivamente se tende a $+\infty$, negativamente se tende a $-\infty$).
- Se per x che tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$, una funzione tende a un numero finito la funzione si dice **convergente**.

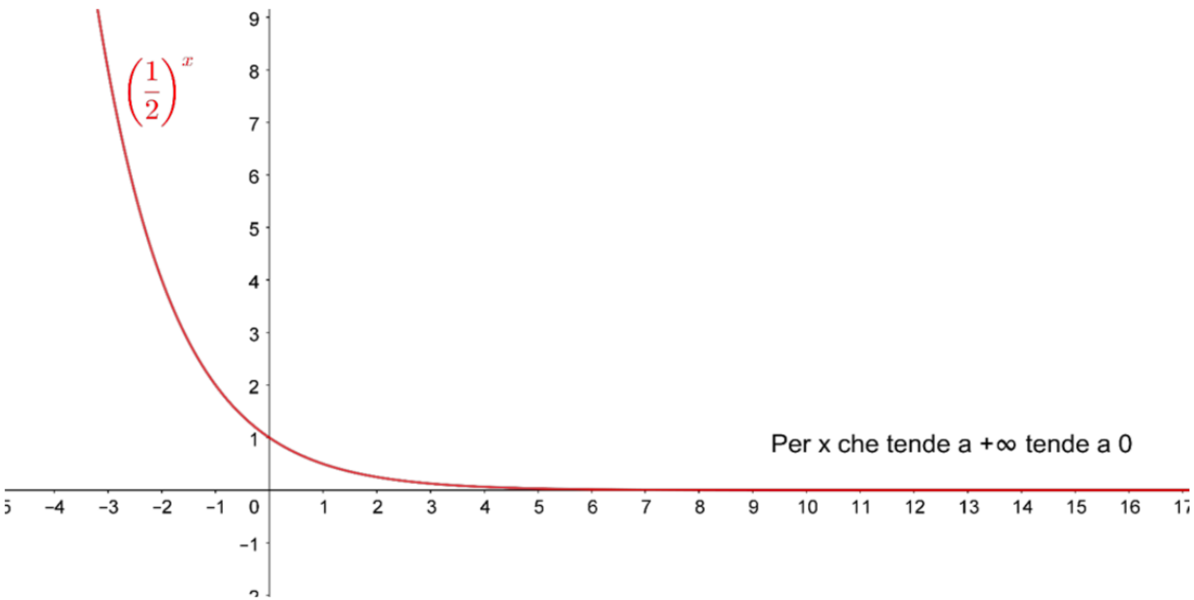
Limiti di funzioni note

- Se a > 1, **funzioni esponenziali a^x e funzioni logaritmo $\log_a(x)$** sono divergenti positivamente per x che tende a +∞ :



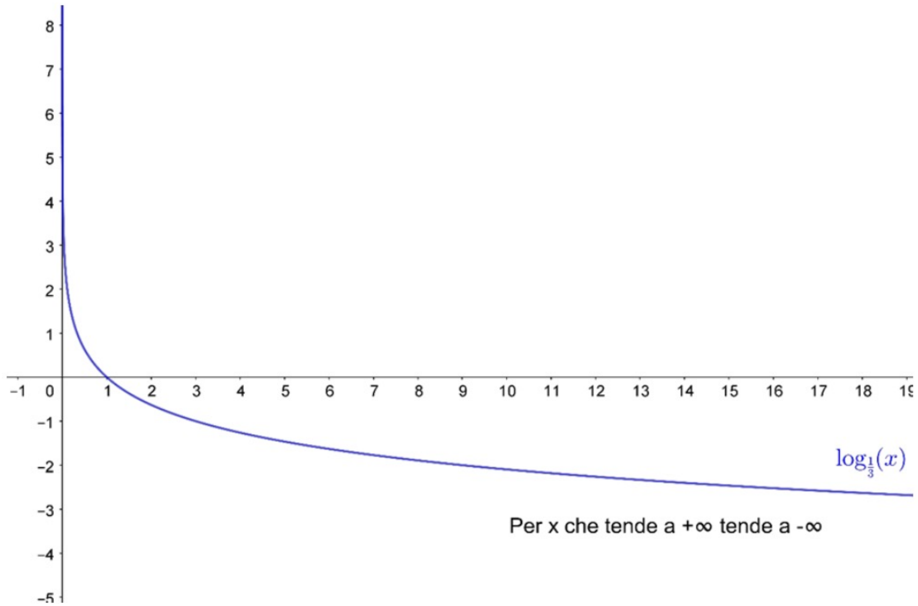
Limiti di funzioni note

- Se a < 1, funzioni esponenziali a^x sono convergenti a zero per x che tende a $+\infty$:



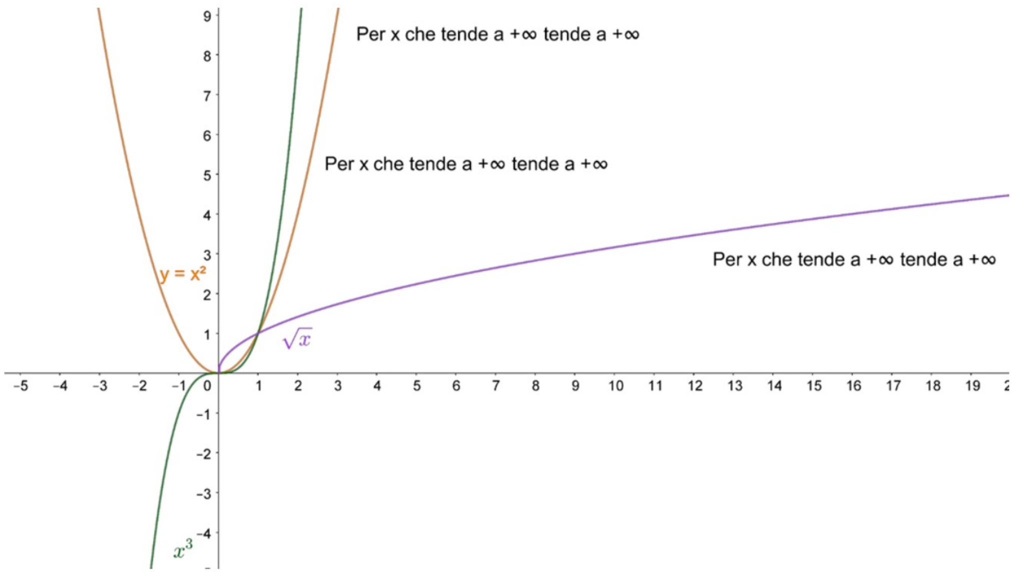
Limiti di funzioni note

- Se a < 1, funzioni logaritmo $\log_a(x)$ sono divergenti negativamente per x che tende a +∞:



Limiti di funzioni note

- Funzioni **potenza x^k** per k numero naturale (k = 2,3,4, etc …) ma anche per k numero razionale (k = 1⁄2, 1/3, etc …), cioè funzioni radice, divergono positivamente per x che tende a +∞:



Limiti dell'iperbole equilatera

- Data l'iperbole equilatera $f(x) = 1/\,x$, definita in $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.
- Quando si divide per un numero che tende a zero si ottiene un numero che tende a infinito, e quando si divide per un numero che tende a infinito si ottiene un numero che tende a zero, quindi:
- Se $x \to 0$, $1/x \to \infty$;
- Se $x \to \infty$, $1/x \to 0$
- **Attenzione ai segni**: se, per esempio, dividiamo 1 per $+\infty$ il risultato sarà un numero vicino a 0, ma positivo, che indichiamo con 0^+ e se dividiamo 1 per $-\infty$ il risultato sarà un numero vicino a 0, ma negativo, che indichiamo con 0^-.

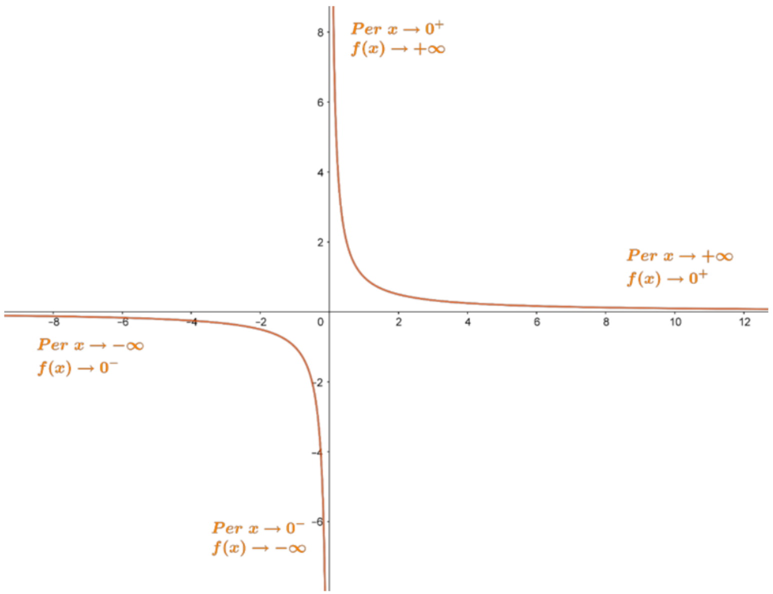
Limiti dell'iperbole equilatera

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty;$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty;$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+;$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-.$



Funzione divergente positivamente

- Data una funzione reale a variabile reale y = f(x), si dice che il limite della f(x) per x che tende a +∞ è +∞ e si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- se scelta una qualunque soglia di y arbitrariamente fissata, f(x) supera quella soglia, cioè se fissato un certo $\overline{y}$, esiste un valore $\overline{x}$ tale per che ogni x > $\overline{x}$ si ha: f(x) > $\overline{y}$.

Funzione divergente negativamente

- Data una funzione reale a variabile reale f(x), si dice che il limite della f(x) per x che tende a +∞ è −∞ e si scrive:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- se scelta una qualunque soglia di y arbitrariamente fissata, f(x) rimane sotto quella soglia, cioè se fissato un certo $\overline{y}$, esiste un valore $\overline{x}$ tale per che ogni x > $\overline{x}$ si ha: f(x) < $\overline{y}$.

Funzione convergente

- Data una funzione reale a variabile reale f(x), e dato un numero reale l, si dice che il limite della f(x) per x che tende a +∞ è l o che la funzione converge a l e si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

- se scelto un valore soglia ε (si legge epsilon) , esiste un valore $\bar{x}$ tale che per ogni x $> \bar{x}$, f(x) si avvicina a l, nel senso che dista da l meno della soglia scelta ε.
- Dire che f(x) dista da l meno di ε significa che $l - \varepsilon$ < f(x) < $l + \varepsilon$.
- La retta y = l si chiama **asintoto orizzo**ntale.

Proprietà dei limiti

A. Il limite della somma di due funzioni è la somma dei limiti, a meno che il risultato non sia del tipo $+\infty - \infty$;

B. Il limite del prodotto di due funzioni è il prodotto dei limiti, a meno che il risultato non sia del tipo $0 \cdot \infty$;

C. Il limite del quoziente di due funzioni è il quoziente dei limiti, a meno che il risultato non sia del tipo $0/0$ oppure ∞/∞;

D. Il limite della potenza è la potenza dei limiti, a meno che il risultato non sia del tipo 0^0, oppure ∞^0 oppure 1^∞.

E. Il limite del reciproco di un infinito è un infinitesimo e il limite del reciproco di un infinitesimo è un infinito.

Proprietà dei limiti

- Le forme che non rientrano in queste proprietà si chiamano **forme indeterminate**.

$$+\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0^0; \quad \infty^0; \quad 1^\infty$$

Esempio

- Calcolare il limite: $\lim_{x \to +\infty} (log_2 x^2 + \frac{3}{e^x})$

Poichè il limite della somma è la somma dei limiti (proprietà A) calcoliamo separatamente i limiti dei due addendi:

$$\lim_{x \to +\infty} (log_2 x^2)$$

per x che tende a +∞, x^2 tende a +∞, quindi, dato che l'argomento del logaritmo tende a +∞ e che la base del logaritmo è maggiore di 1 $\lim_{x \to +\infty} (log_2 x^2) = +\infty$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} (\frac{3}{e^x})$$

Il limite del quoziente è il quoziente dei limiti (proprietà C) per calcolare il limite per x che tende a + ∞ di 3 ,calcoliamo separatamente i limiti di numeratore e denominatore.

Il numeratore è una costante, pertanto per x che tende a +∞ tende a 3. Il denominatore è una funzione esponenziale con base maggiore di 1, pertanto tende a +∞. Poichè il reciproco di un infinito è un infinitesimo (proprietà E) l'intera frazione tende a 0.

Pertanto: $\lim_{x \to +\infty} (log_2 x^2 + \frac{3}{e^x}) = +\infty$

Gerarchie di infiniti

- Quando una funzione f(x) diverge positivamente più rapidamente di un'altra funzione g(x) si dice che f(x) è **un infinito di ordine superiore** rispetto a g(x).
- Più formalmente, f(x) è di ordine superiore a g(x) se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f)x)}{g(x)} = +\infty$, ed f(x) e g(x) sono dello stesso ordine se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f)x)}{g(x)} = l \neq 0$.

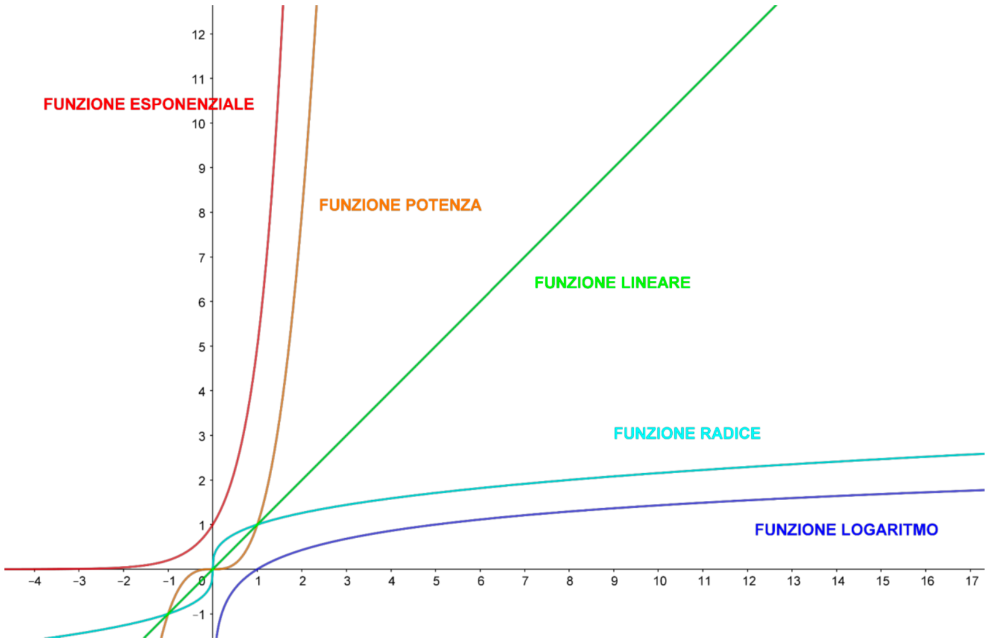
Gerarchie di infiniti

Scriviamo alcune funzioni divergenti note, da quelle di ordine superiore a quelle di ordine inferiore:

1. FUNZIONI ESPONENZIALI CRESCENTI
2. FUNZIONI POLINOMIALI POTENZA
3. FUNZIONI LINEARI
4. FUNZIONI RADICE
5. FUNZIONI LOGARTIMO CRESCENTI

Questo vuol dire che, per esempio, anche se una funzione logaritmo tende a $+\infty$, essa è trascurabile rispetto a una funzione lineare, e una funzione lineare anche se tende a $+\infty$ è trascurabile rispetto a una funzione esponenziale

Gerarchie di infiniti



Esercizi

1) $\lim_{x\to+\infty} (\log_4 x - \sqrt{x}).$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^5-2x^2}.$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^4-12x^3+3x-2}{3x^4+2x^3-2x+1}.$

Parte 3

Le derivate

Derivata di una funzione

- Per conoscere quanto sta crescendo (o decrescendo) una certa funzione in un determinato punto, e anche l'andamento generale del suo tasso di variazione, cioè della velocità con cui cresce (o decresce), serve il concetto di **derivata di una funzione**.
- La derivata ci darà una misura della "suscettibilità" di una funzione f(x), dicendoci se f(x) varia rapidamente o lentamente al variare della x.
- Per capire come varia (quanto cresce o decresce) una funzione in suo punto x_0 (cioè in un punto x_0 del suo Dominio), valutiamo il rapporto $\Delta y/\Delta x$ a partire proprio dal punto x_0.
- Stabiliamo un certo incremento positivo h, arrivando al punto x_0 + h. In questo modo l'incremento Δx è Δx = (x0 + h)–x0 = h.
- Scriviamo l'incremento Δy che sarà Δy = f(x0+h)–f(x0).

Rapporto incrementale

Il rapporto:

$$\frac{\boldsymbol{f(x_o + h) - f(x_0)}}{\boldsymbol{h}}$$

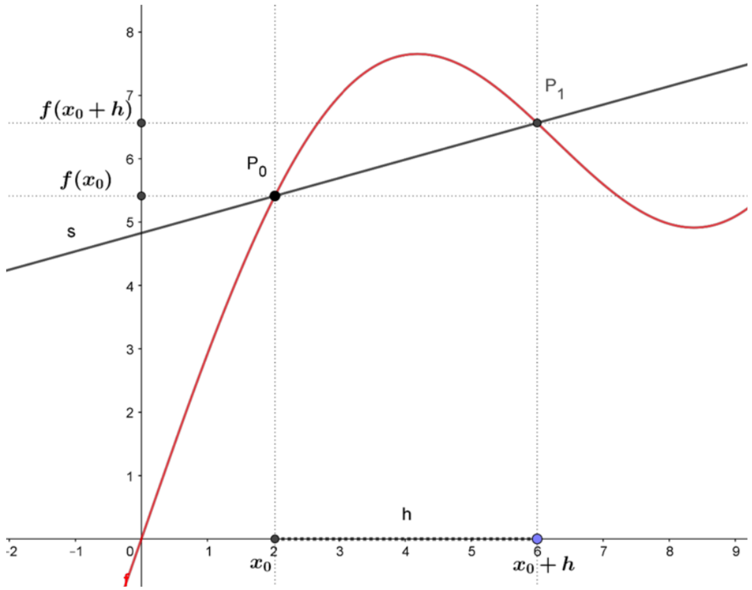
si chiama **rapporto incrementale** e stabilisce una “velocità media” della variazione della f(x) rispetto alla x.

Derivata puntuale

- Si voglia misurare la velocità istantanea in un punto, valutando la pendenza di una funzione nel punto.
- Data una funzione f(x), un punto x_0 del suo Dominio e un incremento $h > 0$, il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta s passante per i punti

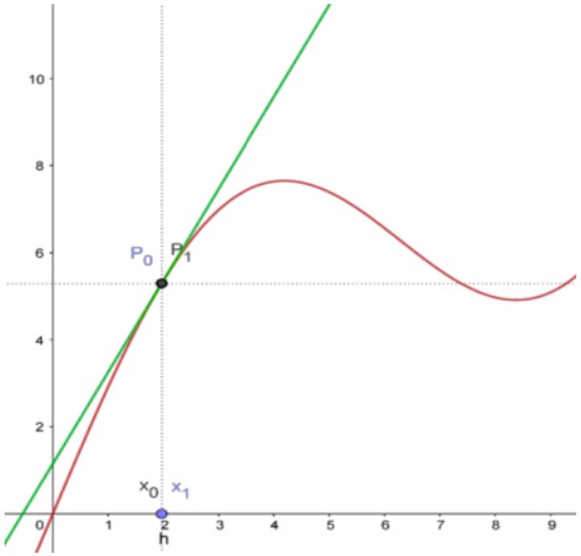
$$P_0 \equiv (x_0, f(x_0)) \text{ e } P_1 \equiv (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Derivata puntuale



- Per misurare la pendenza della funzione nel punto di ascissa x_0, dobbiamo assicurarci che l'incremento *h* sia molto piccolo, cioè che la retta secante s diventi la retta tangente alla funzione nel punto di ascissa x_0.
- Per questo motivo calcoliamo il limite per h che tende a zero della funzione f(x).

Derivata puntuale



In questo modo nel punto di ascissa x_0 si approssima la funzione alla retta tangente.

Definizione di derivata

- Si definisce **derivata della funzione** f(x) nel punto x_0 e si scrive f '(x0):

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Si può definire la derivata in un punto solo se in quel punto il limite per h che tende a zero esiste ed è un numero reale (non infinito).
- La derivata di una funzione in un punto x_0, allora, **è un numero che rappresenta il coefficiente angolare, e quindi la pendenza, della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa x_0.**

Calcolo della derivata ed esempi

- Assegnata una funzione f(x), dato che in ogni punto x_0 si può calcolare il numero $f'(x_0)$, è possibile definire una funzione, che chiamiamo funzione derivata, che associa ad ogni punto x_0 la sua derivata.
- In generale, data una funzione f(x), si chiama funzione derivata, o semplicemente derivata, la funzione $f'(x)$ che associa ad ogni punto del Dominio di f(x) il valore della derivata puntuale in quel punto.
- Per capire come calcolare la derivata di una funzione facciamo un esempio pratico:

Calcolo della derivata ed esempi

- Sia data la funzione $f(x) = x^2$
- Scelto un qualsiasi punto x_0 appartenente al Dominio (che in questo caso coincide con R), avremo che:
- $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2-(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2{}_0+h^2+2x_0h-x^2{}_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h+2x_0}{1} = 2x_0$
- Quindi, poichè la derivata puntuale di x^2 in ogni punto x_0 è $2x_0$, la derivata di f(x) = x^2 , è la funzione $f'(x) = 2x$.

Calcolo della derivata ed esempi

- Con calcoli simili si può anche trovare che, **se $f(x) = x^n$, la derivata di $f(x)$ è la funzione $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$**. E questo vale non solo per n numero naturale, ma anche se n è un numero razionale o negativo.
- Quindi, per esempio, la derivata di x^3 è $3x^2$, la derivata di x^5 è $5x^4$, ma possiamo anche scrivere le derivate di 1/x e $\sqrt{x}$
- 1/x = x-1 quindi la sua derivata sarà -1$\cdot\ x^{-1-1} = -x^{-2} = -1/x^2$
- $\sqrt{x}$=x1/2, quindi la sua derivate sarà 1/2 $\cdot x^{(1/2-1)}$=1/2$x^{-1/2}$=1/2$\sqrt{x}$

Calcolo della derivata ed esempi

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$

Regole di derivazione

Siano f(x) e g(x) due funzioni, che qui abbrevieremo rispettivamente con f e g, e sia c una costante. Allora:

A. Moltiplicazione per una costante: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

B. Somma: $(f + g)' = f' + g'$

C. Prodotto: $(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g'$

D. Rapporto: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Esempi

1. Deriviamo una funzione lineare, per esempio $f(x) = 3x + 24$.
   Per la regola B. la derivata della somma di $3x$ e di 24 è la somma delle derivate. Per la regola A. la derivate di $3x$ è 3 moltiplicato per la derivata di x, che è 1, e la derivata della costante 24 è zero. Quindi $f'(x) = (3x+24)' = 3 \cdot 1 + 0 = 3$.

In generale, **la derivata di una funzione lineare è sempre uguale al suo coefficiente angolare**. Infatti la derivata di una funzione ci racconta come cresce la funzione, e una funzione lineare cresce sempre secondo il suo coefficiente angolare.

Esempi

2. Deriviamo una funzione polinomiale, per esempio $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 3x + 1$.
   Per le regole di derivazione A. e B. abbiamo $f'(x) = 3 \cdot (5x^4) + 2 \cdot (3x^2) - 3 \cdot 1 + 0 = 15x^4 + 6x^2 - 3$. **In generale, la derivata di una funzione polinomiale di grado n è sempre un polinomio di grado n – 1.**

3. Deriviamo il prodotto di due funzioni, per esempio $f(x) = x^2 \cdot (\ln(x) + x)$.
   Per la regola di derivazione C. la derivata del prodotto è la somma del primo fattore x^2 derivato per il secondo fattore $(\ln(x) + x)$ e del primo fattore x^2 per il secondo fattore $(\ln(x) + x)$ derivato. $(x^2)' = 2x$ e $(\ln(x) + x)' = 1/x + 1$. Allora $f'(x) = 2x \cdot (\ln(x) + x) + x^2 \cdot (1/x + 1)$.

Esempi

4. Deriviamo il rapporto di due funzioni, per esempio $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Per la regola di derivazione D. la derivata del rapporto è il rapporto in cui al denominatore c'è il quadrato della funzione x e al numeratore la differenza $(x^2 + 1)' \cdot (x) - (x^2 + 1) \cdot (x)'$.

Allora, $f'(x) = \frac{(2x)x-(x^2+1)1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Derivata di una funzione composta

Sia $h(x) = f(g(x))$ una funzione composta. La sua derivata è:

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Per semplicità, se omettiamo la variabile x possiamo scrivere:

$$h' = (f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

Esempi

1. Sia $h(x) = (x + 1)^7$. La funzione *h* è una funzione composta perchè a *x* associamo *x + 1* e a *x + 1* associamo $(x + 1)^7$. Le due funzioni che compongono la *h* sono allora *f(x) = x7* e *g(x) = x + 1*. In pratica la funzione *h* è la *f*, ma come argomento della *f* abbiamo invece di *x* la *g(x)*. La sua derivata allora è $h'(x) = f'(g) \cdot g' = 7(x + 1)^6 \cdot 1$.
2. Sia $h(x) = e^{2x}$. h(x) è una funzione composta perchè a x associamo 2x e poi a 2x associamo e^{2x}. Le due funzioni che compongono la h sono allora $f(x) = e^x$ e g(x) = 2x. In pratica la funzione h è la f, ma come argomento della f abbiamo la g(x). La derivata di h(x) allora è $h'(x) = f'(g) \cdot g' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$.
3. Sia h(x) = ln(3x). h(x) è una funzione composta perchè a x associamo 3x e poi a 3x associamo ln(3x). Le due funzioni che compongono la h sono allora f(x) = ln(x) e g(x) = 3x. In pratica la funzione h è la f, ma come argomento della f abbiamo la g(x). La derivate di h(x) allora è $h' = f'(g) \cdot g' = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$

Studio del segno di una funzione

Data una funzione f(x), e un punto x_0 del suo Dominio, il segno della derivata puntuale in x_0, f '(x_0) determina la crescenza o decrescenza della funzione. Infatti f '(x_0) è il coefficiente angolare della retta tangente alla f(x) nel punto di ascissa x_0. Pertanto:

- Se $f'(x_0) > 0$ la f(x) è **crescente** in x_0
- Se $f'(x_0) = 0$ la f(x) è **stazionaria** in x_0
- Se $f'(x_0) < 0$ la f(x) è **decrescente** in x_0

Pertanto per stabilire gli intervalli in cui una funzione cresce, decresce o è stazionaria possiamo studiare il segno della sua derivata.

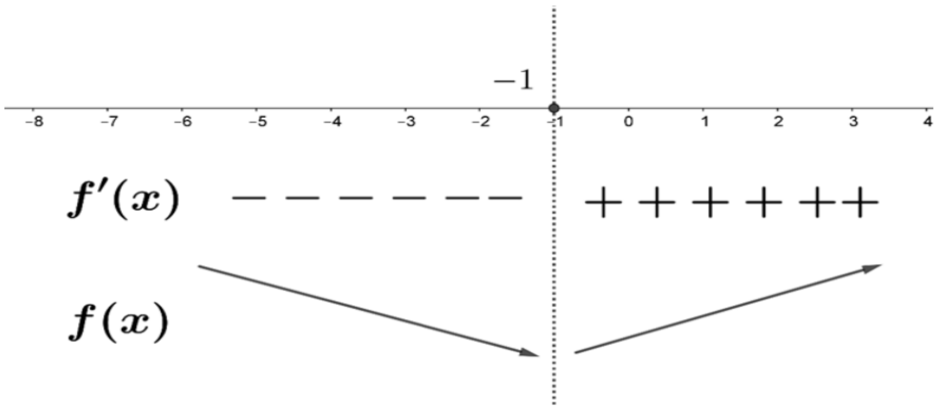
Esempio

Consideriamo per esempio la funzione quadratica $f(x) = x^2 + 2x - 15$. Come sappiamo si tratta di una parabola quindi ci saranno intervalli in cui cresce e intervalli in cui decresce.

Calcoliamo la derivata: $f'(x) = 2x + 2$.
Per studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione andiamo a studiare il segno della derivata.

$2x + 2 > 0$ se $x > -1$, pertanto prima di -1 la derivata è negativa e la funzione decrescente, dopo -1 la derivata è positiva e la funzione crescente. Invece nel punto -1 la derivata è nulla e la funzione è stazionaria.

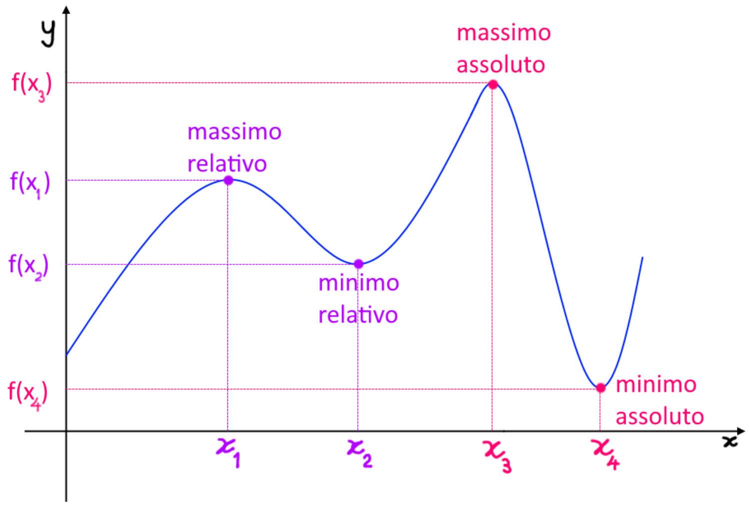
Esempio



Pertanto, poichè prima di -1 la funzione decresce e dopo -1 la funzione cresce, il punto di ascissa -1 è un **punto di minimo**. Infatti si tratta del vertice della parabola.

Estremi relativi di una funzione

Concettualmente, un punto è di **estremo relativo** se la funzione in quel punto tocca il suo valore più alto (in caso di massimo) o più basso (in caso di minimo) in un determinato intervallo contenente il punto.



Estremi relativi di una funzione

- Formalizziamo ora le definizioni:
  Sia f: $]a, b[\rightarrow$ R, e sia $x_0 \epsilon\ ]a, b[$. Allora:
- il punto x_0 si dice di **massimo relativo**, se esiste un intervallo I (cioè un sottoinsieme continuo di]a, b[, del tipo $I =]x0 - \delta, x0 + \delta[$, tale che per ogni $x \epsilon I$, f(x0) ≥ f(x);
- il punto x_0 si dice di **minimo relativo**, se esiste un intervallo I (cioè un sottoinsieme continuo di]a, b[, del tipo $I =]x0 - \delta, x0 + \delta[$, tale che per ogni $x \epsilon I$, f(x0) ≤ f(x).

Tutti i punti di massimo relativo o minimo relativo sono a tangente orizzontale.

Teorema di Fermat

Sia $f\colon]a, b[\rightarrow \mathrm{R}$, sia $x_0 \epsilon\ ]a, b[$ un punto di estremo relativo (massimo o minimo) e sia f derivabile in x_0 (cioè la derivata nel punto x_0 esiste).

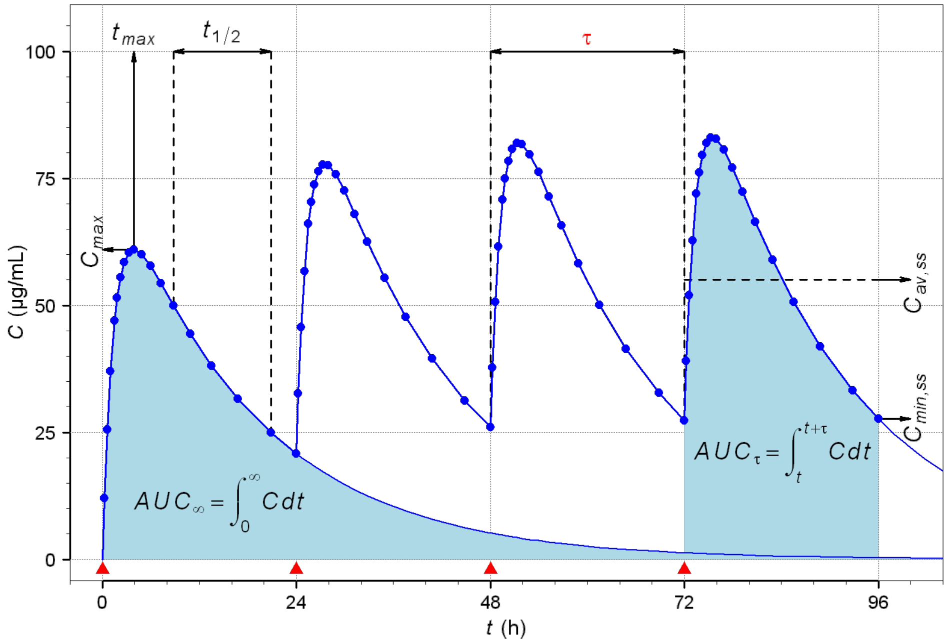
Allora $f'(x_0) = 0$, cioè nel punto di ascissa x_0 c'è una tangente orizzontale.

Parte 4

Gli integrali

L'integrale definito

- In ambito farmaceutico, lo studio degli integrali risulta fondamentale per calcolare l'area sotto la curva (AUC) concentrazione/tempo, che descrive l'effetto di un farmaco nel tempo.
- L'AUC rappresenta infatti gli effetti dell'esposizione totale di un farmaco in un dato intervallo di tempo.



L'integrale definito

- Siano F (x) e f (x) due funzioni definite fra a e b, cioè sull'intervallo [a,b] se a ≤ b e sull'intervallo [b,a] se a > b.
- Se **F(x) è una primitiva** di f(x), cioè F′ = f, definiremo l'integrale definito di f(x) da a a b in questo modo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- I numeri a e b sono detti **estremi di integrazione**.
- La funzione f(x) dentro l'integrale è detta **funzione integranda**.
- La variabile x (dx) è detta **variabile di integrazione**.

La primitiva di una funzione

- La funzione $F(x)$ è la primitiva della $f(x)$, ossia una funzione la cui derivata prima è uguale alla $f(x)$:
    - $D[F(x)+k]=f(x)$
- Ad esempio, la funzione $f(x)=2x$ ha come funzione primitiva $F(x)=x^2+k$ perché la derivata prima della $F'(x)=2x$.
- k è una costante qualsiasi che scompare con la derivata prima in quanto $D[k]=0$.

Definizione formale di integrale definito

- Se tra i due insiemi A e B esiste un elemento unico c che li separa, si dice che la funzione **f(x) è integrabile in [a,b] secondo Riemann**.

- c=supA=infB

- L'elemento c è detto **integrale definito** di f(x) in [a,b] e si indica con il simbolo seguente:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Esempio

Calcoliamo l'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione y = $\frac{1}{x}$ da 1 a 7:

$$\int_1^7 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^7 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

ed è chiaro che il numero 7 si può sostituire con qualunque numero t, ottenendo così il significato geometrico del logaritmo.

Teoremi sul calcolo integrale

1. **Teorema fondamentale del calcolo integrale**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. **Scambio degli estremidi integrazione**

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Teoremi sul calcolo integrale

3. Regola di Chasles

Per ogni a, b, c ∈ D di f , in qualunque ordine,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Metodi di integrazione numerica

- Lo scopo di questi metodi è di calcolare in modo approssimato un integrale definito di una funzione di una o piu' variabili:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx \qquad x \in [a,b]}$$

- L'integrazione numerica si basa (quasi sempre) semplicemente sulla definizione di integrale definito e sull'approssimazione di una funzione in un certo intervallo con una polinomiale data.

Metodo di Bezout o dei trapezi

- Con una approssimazione al primo ordine l'integrale definito di una generica funzione f si può scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(b)+f(a)) = I_1$$

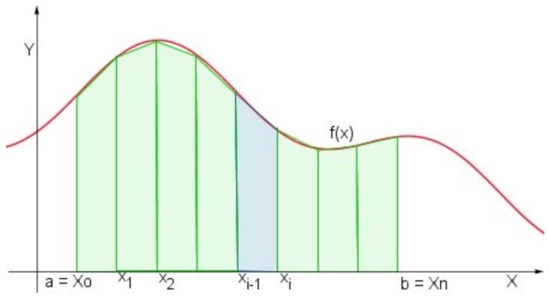
Utilizzando l'additività dell'integrale si può suddividere l'intervallo [a,b] in n intervalli di ampiezza h =(b-a)/n. Su ogni intervallo si avrà:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i)+f(x_i+h)) = \frac{h}{2}(f_i+f_{i+1})$$

Metodo di Bezout o dei trapezi

In dettaglio, si suddivide l'intervallo di integrazione [a,b] in n parti uguali:

$$a=x_0<x_1<x_2\ldots<x_n=b$$



Otteniamo così n intervalli più piccolo, $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, … $[x_{n-1}, b]$. L'ampiezza di ogni intervallo parziale sarà $h=\frac{b-a}{n}$. Il valore approssimativo dell'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ è dato dalla somma delle aree di tutti i trapezi.

Esercizio sull’integrale definito

Trovare un’approssimazione dell’integrale:

$$\int_{-1}^{1} (x\sqrt{1+x^2}+2)dx$$

Mediante la formula dei trapezi.

$I_1 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$

$f_0 = f(-1) = -\sqrt{2}+2$

$f_1 = f(1) = \sqrt{2}+2$

$I_1 = -\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2=4$